LIBRO PARA
EL ESTUDIANTE

ÁLGEBRA LINEAL

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA
PARA CARRERAS DE INGENIERÍA

MARIANA VALERIA PÉREZ

: AULA ABIERTA :

Libros de UNAHUR

Libro para
el estudiante

Álgebra Lineal

Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería

Libros de
UNAHUR

Libro para
el estudiante

Álgebra Lineal

Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería

MARIANA VALERIA PÉREZ

: AULA ABIERTA :

Pérez, Mariana Valeria
Álgebra lineal : libro para el estudiante : una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería / Mariana Valeria Pérez. - 1a edición para el alumno - Villa Tesei : Libros de UNAHUR, 2019.
288 p. ; 24 x 17 cm.

ISBN 978-987-47285-1-7
1. Álgebra Lineal. 2. Matemática para ingenieros. 3. Aprendizaje. I. Título.
CDD 512.5

1ª edición, septiembre de 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
HURLINGHAM

Rector
Jaime Perczyk

Libros de
UNAHUR

Jefa Departamento editorial
Silvana Daszuk

Coordinación editorial y edición
Silvana Daszuk

Diseño de maqueta
www.trineo.com.ar

Maquetación
Alberto Moyano

Diagramación de tapa
Miguel Canella

ISBN 978-987-47285-1-7

Índice

Presentación de la colección Aula Abierta

La obra *Álgebra Lineal. Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería* nace de la experiencia de una profesora/ investigadora en la Universidad Nacional de Hurlingham, con el objetivo de acercar a colegas docentes y a estudiantes una propuesta de enseñanza contextualizada de ciertos contenidos que suelen dictarse de manera “universal”. Justamente, gran parte de la originalidad y el valor didáctico de esta obra, compuesta por un *Libro para el docente* y un *Libro para el estudiante*, radican en que orienta la selección de temas de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, las secuencias de problemas y los ejercicios que ofrece en el *para qué* los necesitan los futuros egresados y egresadas de las carreras de ingeniería.

Esta obra inaugura la colección Aula Abierta, dirigida a docentes y estudiantes del nivel superior tanto de nuestra universidad como de otras instituciones universitarias y terciarias. La colección tiene como principal objetivo poner en circulación el conocimiento producido en el quehacer mismo de la enseñanza en nuestras aulas, ya que sistematiza en forma de libros las prácticas de los y las docentes para responder a los desafíos y necesidades que surgen de dar clase a estudiantes de los primeros años del nivel superior.

Esos desafíos no son pocos ni sencillos. Algunos se explican por el gran salto que existe en los contenidos de ciertas disciplinas entre el nivel secundario y el superior, por complejidad y profundidad. Otros brotan fruto de características específicas que la UNAHUR comparte con otras universidades del conurbano bonaerense, donde más del 70 % de los estudiantes son los primeros en sus familias que cursan estudios superiores, en carreras no tradicionales. En otros casos, esos desafíos implican mejorar la calidad de los aprendizajes priorizando los diversos contextos de estudio –y luego profesionales– que deben tenerse en cuenta para enseñar una disciplina según para qué carreras y perfiles de egresados se dicta. Y, también, responder a la necesidad de contar con libros de determinados contenidos, prácticas y materias para los que existe una vacancia de publicaciones y materiales didácticos actualizados.

La colección Aula Abierta, entonces, nace para acercar a los docentes y estudiantes libros actualizados y rigurosos, que nacen en y para las aulas. En algunos casos, las propuestas se conforman de un libro para el docente –con fundamentos, objetivos, decisiones sobre los contenidos y enfoques, además de actividades, secuencias o problemas concretos para trabajar en el aula– y otro con actividades para los estudiantes. En otros casos, se trata de un libro único.

La Universidad, a través de su editorial Libros de UNAHUR, espera que esta colección cumpla con sus objetivos de difundir el conocimiento disciplinar y didáctico-pedagógico generado en sus aulas, y se convierta en un aporte de referencia para docentes, estudiantes e investigadores del sistema nacional.

Lic. Jaime Perczyk
Rector de la Universidad Nacional de Hurlingham

Introducción

Álgebra Lineal. Libro para el estudiante está dirigido tanto a los y las estudiantes de la materia Álgebra y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería Metalúrgica, Ingeniería Eléctrica y Tecnicatura Universitaria en Energía Eléctrica del Instituto de Tecnología e Ingeniería de la Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR) como de otras instituciones de enseñanza superior en general. El libro tiene como propósito ser un complemento para el estudio de la materia que le dio origen y también para otras relacionadas con los temas de Álgebra Lineal. Por ser un complemento, recomendamos consultar, además, tanto los contenidos teóricos dados por los docentes como los ejercicios prácticos de la bibliografía.

El libro presenta, en primer lugar, el programa resumido de la materia con los contenidos de cada unidad y la bibliografía correspondiente. Luego sigue una serie de capítulos que se corresponden con las unidades del programa (excepto la unidad 8 que no se incluye aquí dado que se desarrolla como trabajo práctico en las clases). Al inicio de cada uno de los temas de esos capítulos, la sección “Problema modelo” trabaja con algunos ejercicios resueltos y se explicitan cuáles son los propósitos de esa resolución. A continuación se incluye una “Guía de problemas” y ejercicios teórico-prácticos con algunas resoluciones para complementar el estudio del tema. Al final de cada capítulo, la sección “Ejercicios varios” reúne problemas que integran diversos conceptos trabajados en el capítulo; algunos fueron pensados para ser discutidos en clase o en grupo y otros, para ser resueltos de manera individual y autónoma.

Los problemas y ejercicios modelo se diseñaron para resolverlos, idealmente, en pequeños grupos y luego debatirlos en el mismo grupo o en la clase. Esto permitirá iniciar el aprendizaje de un contenido nuevo usando los contenidos previos, o bien comprender un concepto determinado. Esos problemas modelo presentan situaciones de argumentación, de justificación y de cálculo, porque consideramos necesario que los futuros ingenieros tengan instancias para argumentar y justificar una determinada afirmación matemática, aplicada a algún contenido propio de la ingeniería o no, y que también tengan instancias de redacción ordenada de sus pensamientos.

Además, es importante que manejen procedimientos básicos de cálculo que les permitan abordar problemas más complejos. Cabe mencionar que, como el trabajo de exploración con la computadora es valioso para los futuros ingenieros, se proponen algunos ejercicios que se resuelven con Geogebra y Octave, herramientas poderosas tanto de geometría dinámica y algebraica como numérica.

Octave o GNU Octave es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Como su nombre lo indica, es parte del proyecto GNU y es considerado el programa libre equivalente al MATLAB. Entre varias características que comparten Octave y MATLAB, se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, lo que permite ejecutar órdenes en modo interactivo. Octave no es un sistema de álgebra computacional, como sí lo es el *software* Máxima, sino que está orientado al análisis numérico. Tiene herramientas de cálculo para solucionar problemas lineales y no lineales, así como otros experimentos numéricos. Tiene también herramientas gráficas para visualizar y manipular los datos. Este programa permite resolver, por ejemplo, problemas de álgebra lineal, cálculo de raíces de ecuaciones no lineales, manipulación con polinomios, entre otras funciones. Se puede usar de forma interactiva o no, empleando ficheros que guarden programas a interpretar. Como su sintaxis y semántica es muy semejante a MATLAB, los programas de este último son fácilmente portables a Octave. Se lo descarga de https://www.gnu.org/software/octave y hay un manual disponible en Borrell 2010.

Por su parte, Geogebra es un *software* educativo libre. Se trata, básicamente, de un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con *software* interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, en proyecciones comerciales, para estimaciones de decisión estratégica y en otras disciplinas. Su categoría más cercana es *software* de geometría dinámica. Geogebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, entre otras. Hay un manual de Geogebra disponible en M. Hohenwarter y J. Hohenwarter 2010.

Geogebra se descarga de su web oficial: https://www.geogebra.org/download?lang=es. Para celulares con sistema Android, se lo descarga de Google Play Store.

Debemos resaltar también que la bibliografía es una fuente imprescindible de consulta, no solo para complementar los contenidos que se vean en el libro sino también para resolver algunos ejercicios. Pensamos que consultar y resolver los problemas de los libros de texto permite que los futuros ingenieros se conviertan en universitarios autómonos y, más adelante, en profesionales de calidad.

También enfatizamos que el trabajo en clase no es suficiente para garantizar el dominio de los contenidos; por eso insistimos en la importancia de ejercitar aparte, con propuestas como las de este libro, y también en consultar con los y las docentes respecto de los trabajos que se realicen.

Por último, destacamos la importancia del trabajo en grupo en tanto es muy enriquecedor compartir las ideas, ponerlas en común y hacerlas explícitas de manera escrita u oral. Estudiando en grupo se confronta mejor, además de que se simula, de alguna manera, lo que será el trabajo en una empresa o industria, donde es muy común que colaboradores de diversas especialidades se relacionen ante a un problema por resolver.

Esperamos que esta obra sea útil y desafiante para todos los y las estudiantes de la disciplina.

Mariana Valeria Pérez

Programa resumido de la materia

Se presenta aquí el programa resumido de la materia Álgebra y Geometría Analítica que se dicta en la Universidad Nacional de Hurlingham. El programa extenso ha sido aprobado por el Consejo Directivo del Instituto de Tecnología e Ingeniería de la Universidad; quienes cursan la materia en la UNAHUR también acceden a consultarlo en el aula virtual correspondiente.

A continuación se fundamenta de manera sintetizada la importancia de la materia en las carreras de Ingeniería y se exponen los contenidos de cada unidad, sus objetivos y la bibliografía de consulta.

Fundamentación de la materia

La asignatura Álgebra y Geometría Analítica se incluye en el primer año, segundo cuatrimestre, de las Ingenierías Metalúrgica y Eléctrica, y de la Tecnicatura Universitaria en Electricidad. Está enmarcada en el Campo de Formación Básica en Ingeniería (CFBI) de esas carrereas y es la segunda materia de matemática que cursan los estudiantes después de Introducción al Análisis Matemático. Actualmente es cuatrimestral, con una carga de seis horas cátedra semanales, que suman 96 horas cátedra totales. Su objetivo principal es proporcionar herramientas del Álgebra Lineal y de la Geometría en Coordenadas necesarias para el desarrollo profesional del estudiante.

Los contenidos se orientan a afianzar cuestiones algebraicas, gráficas y geométricas propias del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica, así como a repensar y profundizar algunos conceptos vistos en Introducción al Análisis, por ejemplo, sistemas de ecuaciones lineales, rectas y planos, y el concepto de función, dominio e imagen. Hacia adelante, estos conocimientos facilitarán el aprendizaje en las asignaturas Análisis Matemático I y II; Física I, II y III, y Probabilidad y Estadística. Por otra parte, el estudio de estos contenidos colabora en desarrollar la capacidad de pensamiento lógico y riguroso, en combinar la abstracción con la visualización de los conceptos en forma gráfica y en la capacidad de aplicarlos. Saber utilizar ciertos fundamentos teóricos permite desarrollar habilidades para razonar matemáticamente y para transferir con creatividad esos conocimientos y habilidades a diversas aplicaciones.

Las actividades incluyen algunos ejemplos del uso del Álgebra Lineal en otras disciplinas no tan técnicas y también del uso de la computadora para la resolución de problemas. En este sentido, los estudiantes tendrán un panorama del tipo de trabajo posible con ciertas herramientas computacionales en las que juegan un rol fundamental la exploración, la simulación y la observación de regularidades a partir de cálculos.

Contenidos de la materia y objetivos

Las unidades del programa se organizan, fundamentalmente, en tres ejes temáticos. El primer eje refiere a ciertos temas de Álgebra, por ejemplo, la noción de estructura de cuerpo en los números complejos como una extensión del cuerpo de los números reales, teniendo en cuenta las ventajas y desventajas de dicha extensión. El segundo eje abarca temas fundamentales del Álgebra Lineal, como vectores y matrices, sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de resolución, la función determinante y su importancia, la noción de espacios vectoriales y de base, las transformaciones lineales y el concepto de autovalores y autovectores, con algunas de sus primeras aplicaciones. El tercer eje refiere a temas fundamentales de Geometría Analítica en el plano y el espacio, por ejemplo, rectas, planos y cónicas.

Los contenidos de cada unidad, sus objetivos y la bibliografía recomendada son los siguientes:

Primer eje: Nociones de Álgebra

Este primer eje se desarrolla en la unidad 1.

Unidad 1: Números complejos

Su definición. Los modos de representación de un número complejo. Forma binómica. Sus operaciones: suma, resta, multiplicación y división entre números complejos. Propiedades de las operaciones. Potencias de la unidad imaginaria. Complejos conjugados: definición y propiedades. Módulo de un número complejo y ángulo de un número complejo, su representación vectorial. Forma polar y trigonométrica de un número complejo. Potenciación y radicación en los números complejos. Fórmula de De Moivre.

Objetivos de la unidad

- Comprender las limitaciones de los números reales para encontrar raíces de polinomios con coeficientes reales.
- Reconocer los números complejos en sus distintas representaciones, comprendiendo las ventajas y desventajas de cada representación.
- Operar correctamente con los números complejos.

Bibliografía recomendada

1. Krick, Teresa, "Capítulo 6", en *Álgebra I*, Universidad de Buenos Aires, Cursos de grado, 2017, págs. 213-237.
2. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Apéndice B", en *Álgebra Lineal*, séptima edición, McGraW-Hill, 2012, págs. 655-665.
3. Kolman, Bernard y David Hill, "Apéndice 1", en *Álgebra Lineal*, octava edición, Pearson Educación, 2006, págs, 675-693.
4. Lay, David, "Apéndice B", en *Álgebra Lineal y aplicaciones*, cuarta edición, Pearson Educación, 2012, págs. 512-516.

Segundo eje: Nociones de Álgebra Lineal

Este eje abarca las unidades 2 a 6.

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales: definición y tipos de soluciones. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tipos de soluciones y su interpretación gráfica. Sistemas de ecuaciones lineales generales. Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones equivalentes. Operaciones elementales. Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales: eliminación de Gauss-Jordan, eliminación Gaussiana. Clasificación de sistemas lineales por su tipo de solución. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Modelizar problemas a través de sistemas de ecuaciones lineales.
- Interpretar geométricamente sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales generales mediante la eliminación Gaussiana indicando el tipo de solución que tiene dicho sistema.
- Anticipar la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales arbitrario.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 1", ob. cit, págs. 1-45.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 1" y "Capítulo 2", ob. cit., págs. 1-182.
3. Lay, David. "Capítulo 1", ob. cit., págs. 1-91.
4. Strang, G., "Capítulo 1", en *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, cuarta edición, Addison-Wesley Iberoamérica, 2007, págs. 1-69.

Unidad 3: Matrices

Definición de matriz. Vectores como un caso particular de matrices: vector fila y vector columna. Operaciones con matrices: suma, multiplicación de un escalar por matriz, producto de matrices. Propiedades: álgebra de matrices. Transpuesta de una matriz. Tipos de matrices: matriz elemental, matriz identidad, matriz nula, matrices simétricas y de permutación. Inversa de una matriz cuadrada. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius.

Objetivos de la unidad

- Usar matrices para organizar determinada información.
- Usar correctamente las operaciones con matrices y sus propiedades.
- Conocer el concepto de inversa de una matriz y su importancia para anticipar, por ejemplo, si un sistema tiene solución o no.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 2", ob. cit., págs. 45-175.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 1"" y "Capítulo 2", ob. cit., págs. 1-182.
3. Lay, David. "Capítulo 2", ob. cit., págs. 91-163.
4. Strang, G., "Capítulo 1", ob. cit., págs. 1-69.

Unidad 4: Determinantes

Definición. Determinantes de orden n. Interpretación geométrica del determinante de una matriz de dos por dos. Propiedades de los determinantes. Matriz adjunta. La relación de la inversa con la función determinante. Regla de Cramer. Existencia de la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas vía el determinante. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Conocer las distintas maneras de calcular la función determinante, entendiendo que todas son equivalentes.
- Calcular la función determinante de una matriz cuadrada a partir de sus propiedades.
- Aplicar el concepto de la función determinante para decidir si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución o no.
- Conocer algunas aplicaciones geométricas del determinante.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, “Capítulo 3”, ob. cit., págs, 175-231.
2. Kolman, Bernard y David Hill, “Capítulo 3”, ob. cit., págs. 182-214.
3. Lay, David, “Capítulo 3”, ob. cit., págs. 163-189.
4. Strang, G., “Capítulo 4”, ob. cit., págs. 201-230.

Unidad 5: Introducción a los espacios vectoriales

Ejemplos concretos de espacios vectoriales: matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Definición y propiedades. Subespacios. Operaciones entre subespacios. Combinación lineal, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial. Extensión a una base a partir de un conjunto linealmente independiente y extracción de una base a partir de un conjunto de generadores de un espacio vectorial.

Objetivos de la unidad

- Interpretar las operaciones suma y producto escalar de matrices como ejemplos de una estructura más general: la de espacio vectorial.

- Interpretar el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo como un subespacio, es decir, como un conjunto de vectores que es cerrado para la suma y el producto escalar.
- Estudiar las nociones de combinación lineal, sistemas de generadores e independencia lineal de un conjunto finito de vectores, a través de ejemplos.
- Determinar las condiciones necesarias y suficientes que tienen que cumplir un conjunto de vectores determinado para formar una base de un determinado espacio vectorial.
- Comprender la importancia de tener una base de un espacio vectorial.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 5", ob. cit., págs. 295-417.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 6" y "Capítulo 7", ob. cit., págs. 279-390.
3. Lay, David, "Capítulo 4", ob. cit., págs. 189-265.
4. Strang, G., "Capítulo 2", ob. cit., págs. 69-141.

Unidad 6: Transformaciones lineales

Definición y ejemplos. Propiedades de una transformación lineal. Imagen y núcleo. Representación matricial de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Isomorfismos e isometrías. Matriz cambio de base. Autovalores y autovectores. Polinomio característico. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Introducir las transformaciones lineales mediante la idea de transformar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ en otro vector $b \in \mathbb{R}^m$, mediante la acción de una matriz A de tamaño $m \times n$, asociada a la transformación lineal.
- Identificar la resolución de la ecuación $Ax = b$ con las nociones de dominio, imagen, y núcleo de la transformación lineal $T(x) = Ax$.
- Interpretar movimientos en el plano como ejemplos de transformaciones lineales.
- Construir ejemplos en el plano que ayuden a comprender los conceptos de autovalores y autovectores.
- Comprender e interpretar los conceptos de autovector y autovalor.

- Construir modelos dinámicos para describir los autovalores y autovalores de una transformación lineal.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, “Capítulo 7” y “Capítulo 8”, ob. cit., págs. 479-647.
2. Kolman, Bernard y David Hill, “Capítulo 8”, “Capítulo 9” y “Capítulo 10”, ob. cit., págs. 408-558.
3. Lay, David, “Capítulos 1” y “Capítulo 5”, ob. cit., págs. 62-80 y 265-329.
4. Strang, G., “Capítulo 5”, ob. cit., págs, 233-315.

Tercer eje: Nociones de Geometría Analítica

Este eje incluye las unidades 7 y 8.

Unidad 7: Vectores en el plano y en el espacio

- *Vectores en el plano.* Operaciones: suma, resta entre vectores y producto de un escalar por un vector. Vector en un sistema de coordenadas y definido por las coordenadas de su origen y extremo. Módulo. Ángulos directores. Versor asociado a un vector. Producto vectorial y mixto. Definición. Interpretación geométrica. Cálculo por coordenadas. Proyección ortogonal de un vector sobre otro. Ángulo entre vectores.
- *Rectas en el plano.* Ecuaciones de la recta que pasa por un punto y es paralela a un vector, ecuaciones de una recta que pasa por un punto y es perpendicular a un vector. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos. Distancia de un punto a una recta en el plano. Intersección entre dos rectas. Aplicaciones.
- *Planos en el espacio.* Ecuación implícita del plano. Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados. Ecuación del plano que pasa por un punto y es paralelo a dos vectores no paralelos entre sí. Ecuaciones paramétricas, vectorial y cartesiana del plano. Posiciones relativas de dos planos. Distancia de un punto a un plano.
- *Rectas en el plano.* Ecuación de la recta en el espacio que pasa por un punto y es paralela a un vector. Recta definida por la intersección de dos planos no paralelos. Posiciones relativas de rectas y planos. Distancia de punto a recta en el espacio. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

Objetivos de la unidad

- Introducir el concepto de vector en el plano y el espacio, y sus operaciones.
- Entender el vínculo existente entre la geometría y el álgebra, el uso de las ecuaciones para modelizar objetos geométricos y estudiar sus propiedades.
- Introducir los conceptos de recta y plano en el espacio desde un punto de vista vectorial.
- Describir rectas y planos mediante representaciones gráficas y ecuaciones.
- Modelizar y resolver problemas geométricos que involucran puntos, rectas y planos.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 4", ob. cit., págs. 231-295.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 4" y "Capítulo 5", ob. cit., págs. 214-272.
3. Howard, Anton, "Capítulo 3", en *Introducción al Álgebra lineal*, Limusa, 1994, págs. 113-151.

Unidad 8: Introducción a las cónicas como lugar geométrico

Origen del nombre. Las tres cónicas: elipse, hipérbola y parábola. Definición de cada cónica a partir de una recta (directriz) y un punto fijo (foco) no perteneciente a ella. Excentricidad. Ecuación canónica correspondiente a cada cónica. Gráficos. Definición clásica de las cónicas. Equivalencia de ambas definiciones. Ecuación de segundo grado incompleta en dos variables. Propiedades.

Objetivos de la unidad

- Interpretar las distintas definiciones de cónicas como lugar geométrico, dándole un sentido a cada uno de sus elementos.
- Encontrar las ecuaciones analíticas que describen cada cónica a partir de las definiciones de cónicas como lugar geométrico.
- Estudiar qué describen las intersecciones entre las distintas cónicas.

Bibliografía recomendada

1. Kindle, J., *Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, Serie Shaum, 1996.

2. Gonzalez, Cecilia y Horacio Caraballo, “Capítulo 3” y “Capítulo 4”, en *Matemática básica para Ingeniería agronómica e Ingeniería forestal*, La Plata, Editorial de la Universidad de la Plata, 2013, págs. 31-36 y 41-52.
3. Lehmann, C., Capítulos IV a VIII, en *Geometría Analítica*, Limusa, 1986, págs. 99-210.

Nota: Esta unidad se desarrolla en forma de trabajo práctico en clase, por lo cual no se le dedica un capítulo en este libro.

Problemas para ejercitar los contenidos de la materia

CAPÍTULO

1

Números complejos

En este capítulo, como en todos los que siguen, una sección específica presenta resueltos algunos problemas modelo que tratan distintos temas de la unidad. Además, se incluye una “Guía de problemas”, que consiste en una lista de ejercicios y problemas con algunas resoluciones. El capítulo termina con la sección “Ejercicios varios”, en la que se proponen actividades dedicadas a uno o más conceptos desarrollados en la unidad, lo que se repetirá a lo largo del libro.

1.1. La necesidad de los números complejos

El siguiente problema modelo tiene el objetivo de mostrar la necesidad de introducir un nuevo conjunto numérico: el de los números complejos.

1.1.1. Problema modelo

1. ¿Puede resolverse cada una de las siguientes operaciones matemáticas con una calculadora que solo opera con números reales? Justificar la respuesta.

   a) $\sqrt{1}$

   b) $\sqrt{-1}$

   c) $\sqrt[3]{-1}$

   d) $\sqrt[4]{-1}$

2. Investigar en grupos cómo la matemática ha resuelto este problema. Se puede consultar la bibliografía o recurrir a internet.
3. Sean las funciones cuadráticas $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   a) Sin usar Octave, conjeturar cuántas raíces tienen. ¿Alguna raíz es real?
   b) Graficar los polinomios con Octave y conjeturar cómo son las raíces de estos polinomios. ¿Alguna raíz corta al eje X?
   c) Utilizando Octave, calcular las raíces y representarlas en el plano.

Resolución del problema modelo

Si calculamos la raíz cuadrada de un número real negativo con la calculadora, esta indica error. En Introducción al Análisis Matemático (y en el Curso de Preparación, en el caso de los estudiantes de la UNAHUR) se explica que solo está bien definida la raíz cuadrada de un número real no negativo. Más aún, sea a un número real no negativo, se definió la raíz cuadrada de a, $\sqrt{a}$, como el único número real no negativo b, tal que $b^2 = a$. Por lo tanto,

$$\sqrt{1} = 1,$$

pues $1^2 = 1$. En cambio, no se puede extender esta definición para $a = -1$, es decir, para calcular $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real b tal que $b^2 = -1$. Más aún, vimos que todo número real al cuadrado es positivo. Es decir,

$$a^2 \geq 0,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Tampoco se puede calcular $\sqrt[4]{-1}$, ya que no existe ningún número real b tal que $b^4 = -1$. Este no es el caso de $\sqrt[3]{-1}$, pues su valor es $\sqrt[3]{-1} = -1$.

La justificación de esta última afirmación queda a cargo del estudiante.

El ítem 2 incentiva la búsqueda bibliográfica y la puesta en común de lo trabajado. Aquí se presenta una breve reseña, que puede servir de guía para la investigación.

Con respecto a los números complejos, la primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, por ejemplo, Herón de Alejandría, en el siglo I a.C., como resultado de una imposible sección de una pirámide.

Los complejos se hicieron más patentes en el siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grado 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) y Gerolamo Cardano (1501-1576). Aunque ellos solo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. Las reglas para la suma, resta, producto y división fueron desarrolladas por el matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572). El término “imaginario” para estas cantidades (y “real” para los números reales) fue acuñado por René Descartes en el siglo XVII. Todos sabemos que no existe ningún número real r tal que $r^2 = -1$. Frente a la necesidad de encontrar un número r tal que $r^2 = -1$, se introduce una unidad imaginaria i que no pertenece a los números reales, pero que satisface $i^2 = -1$. Se agrega al cuerpo de los números reales esa nueva cantidad imaginaria i, construyendo así el menor conjunto que contiene a

$\mathbb{R}$ y a i, y donde se puede sumar y multiplicar (respetando la distributiva del producto con respecto a la suma). Este nuevo conjunto numérico se llama el conjunto de los Números Complejos y se lo denota por $\mathbb{C}$.

Para resolver el ítem 3, recurrimos a la fórmula resolvente para calcular raíces de un polinomio de grado dos. Más precisamente, si buscamos x tal que $ax^2+bx+c=0$, sabemos que $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$. Por lo tanto, tenemos que las raíces de $p(x)$ son:

$$p(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1}.$$

Estas raíces no pueden ser reales. ¿Por qué? Una manera de responder esta pregunta es con la ayuda de un programa como Octave que, como dijimos en la introducción, se puede descargar de https://www.gnu.org/software/octave.

Grafiquemos el polinomio $p = x^2 + 1$ con Octave; para ello hay que usar el comando $ezplot('x^2+1')$.

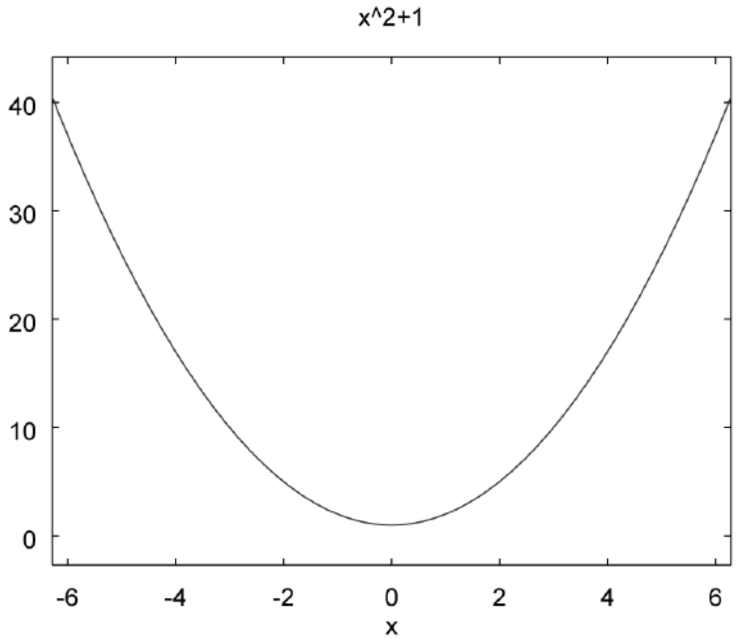


Figura 1.1

Este gráfico muestra que los valores de x tales que $p(x) = 0$ no cortan al eje X. Así intuimos que las raíces de p existen, pero no son números reales.

Para calcular las raíces del polinomio $p(x)$ con Octave necesitamos, primero, representar los coeficientes del polinomio como un vector, es decir: $>>\ p = [1\ 0\ 1]$. Luego, usamos el comando $>>\ roots(p)$. Este programa no muestra las raíces de manera algebraica sino numérica.

```
p=[1 0 1]
roots(p)
ans=
-0 + 1i
0 - 1i
```

Las raíces que indica Octave no son reales, ya que aparece i. Recordando el cálculo hecho anteriormente, podemos decir que el número $\sqrt{-1}$ es i. A partir de este ejercicio se introduce el concepto de número complejo, mostrando que i es un número no real que verifica que $i^2 = -1$, o que es lo mismo que $i = \sqrt{-1}$.

Para graficar las raíces, se puede usar el comando $plot(x, y,' *')$, que dibuja los puntos que tienen como abscisas las componentes del vector x y como ordenadas las componentes del vector y, y observar que las raíces de p son complejas.

```
p=[1 0 1]
val=roots(p)
plot(real(val),imag(real),'*')
```

Como actividad adicional, se propone llegar a las mismas conclusiones pero usando Geogebra, con el fin de tener un panorama de lo que estas herramientas computacionales ofrecen. Resolver el ejercicio para el otro polinomio queda a cargo del estudiante.

1.1.2. Guía de problemas

En esta sección se incluyen ejercicios complementarios para entender la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números que extiende el de los números reales.

Ejercicio 1.1.1. *Usar el programa Geogebra para graficar las siguientes funciones cuadráticas:*

- $f(x) = x^2 - 2x + 2$
- $f(x) = x^2 + 4$

Resolver las siguientes consignas para cada función graficada:

1. *¿El gráfico obtenido corta al eje de X? ¿Qué sucede con las raíces?*
2. *Calcular las raíces de $f(x)$. ¿Qué conclusión se puede extraer?*
3. *¿Qué particularidad tienen las raíces halladas en el ítem anterior?*

Ejercicio 1.1.2. *En el pizarrón de una clase aparece escrito lo siguiente:*

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40.$$

Mauro, un estudiante, dice que esta cuenta no está bien si operamos en los números reales ya que, si fuera verdad, tendríamos que:

$$(5-\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-\sqrt{-15}\sqrt{-15} = 25-\sqrt{(-15)^2} = 25-15 = 10.$$

Juana, otra estudiante, dice que es verdad en los números reales, ya que tendríamos que:

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(\sqrt{-15})^2 = 25-(-15) = 40.$$

En cambio, el docente dice que esta cuenta está bien si pensamos que se resuelve en el conjunto de los números complejos.

1. *Discutir en grupos y argumentar por qué el docente tiene razón, y la cuenta es correcta en los números complejos.*

2. *Discutir en grupos y argumentar por qué tanto la argumentación de Mauro como la de Juana es errónea en los números reales. ¿Qué propiedad de los números reales está mal utilizada?*

1.2. Los números complejos y sus operaciones

El siguiente problema modelo permite operar en el conjunto de los números complejos, usando como modo de representación la forma binómica del número complejo, es decir, escribiendo al número complejo en la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2.1. Problema modelo

1. Dados $z = 5 + 3i$, $w = 7 - 3i$ y $u = 1 + 4i$, tres números complejos, realizar las siguientes operaciones y escribir el número resultante en su forma binómica, es decir, en el formato $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) $z + w$
   b) $w + z$
   c) $z + (w + u)$
   d) $(z + w) + u$
   e) wz
   f) zw
   g) w^3
   h) $(z - w)u$
   i) $zu - wu$.

2. El conjunto de los números reales cumple con la propiedad conmutativa para la suma y el producto, es decir, $a+b = b+a$ y $ab = ba$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. A partir de lo trabajado en el ítem anterior y de acuerdo con la manera en que se define la suma y el producto en $\mathbb{C}$, ¿se puede decir que estas operaciones también son conmutativas en los números complejos?
3. Sean $z = (5 + a) + (3b - 1)i$ y $w = -2 - ai$ dos números complejos. ¿Cuáles son los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el complejo z sea igual al complejo w?
4. ¿Cuánto valen i^{24}, i^{178} e i^{321}? ¿Cuánto valen, en general, i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2} e i^{4n+3} para cualquier $n \in \mathbb{N}$?
5. Sean $z = 5 - 3i^2$ y $w = 6i^{21} + 2$ dos números complejos. Calcular $Re(z)$ e $Im(z)$, $Re(zw)$ e $Im(z - w)$.

Resolución del problema modelo

Para resolver el primer ítem, tenemos que usar las definiciones de suma y producto de los números complejos, que se explicitan a continuación.

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la suma se define: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, y el producto: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Haciendo cuentas, podemos observar que $z + w = w + z$. En efecto, $z + w = 12$ y $w + z = 12$.

También podemos observar que $z + (w + u) = (z + w) + u$. En efecto, por un lado $z + (w + u) = z + (8 + i) = 13 + 4i$ y, además, $(z + w) + u = 12 + u = 13 + 4i$.

De la misma manera, haciendo cálculos podemos observar que $wz = zw$. Así: $wz = (7 - 3i)(5 + 3i) = (35 + 9) + (21 - 15)i = 44 + 6i$ y, por otro lado, $zw = (5 + 3i)(7 - 3i) = (35 + 9) + (-15 + 21)i = 44 + 6i$.

Para resolver w^3, debemos considerar que es una forma resumida de escribir www. En este caso, primero debemos calcular ww, y luego, multiplicar el resultado por w.

$$w^3 = (ww)w = (7 - 3i)^2(7 - 3i) = (40 - 42i)(7 - 3i) = 154 - 414i.$$

También podemos calcular $w^3 = w(ww)$.

Por último, observamos que $(z - w)u = zu - wu$. Más precisamente, $(z - w)u = (-2 + 6i)(1 + 4i) = -26 - 2i$ y, también, $zu - wu = (-7 + 23i) - (19 + 25i) = -26 - 2i$.

Mirando las operaciones definidas para el producto y para la suma en $\mathbb{C}$, vale que $z + w = w + z$, es decir, la propiedad conmutativa para la suma.

También observamos que vale que $zw = wz$, es decir, la propiedad conmutativa para el producto.

Es tarea de los estudiantes justificar lo afirmado anteriormente usando las definiciones de suma y producto en $\mathbb{C}$, y la conmutativa para la suma y el producto en los números reales, es decir, mostrar que $z + w = w + z$ y que $zw = wz$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

En el ítem 3 hay que encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el número complejo z resulte igual que el número complejo w. En este sentido, tenemos que preguntarnos cuándo dos números complejos, escritos en su forma binómica, son iguales. Antes de realizar este ítem, damos algunas notaciones.

Sea $z = a + bi$ un número complejo cualquiera. Llamamos a a la parte real del número complejo z, y la notamos $Re(z) = a$; llamamos b a su parte imaginaria, y la notamos $Im(z) = b$. Observar que $Re(z)$ e $Im(z)$ son números reales.

Para que z sea igual a w, necesitamos que la parte real de z, $Re(z) = 5 + a$, sea igual que la parte real de w, $Re(w) = -2$, y que la parte imaginaria de z, $Im(z) = 3b - 1$, sea igual que la parte imaginaria de w, $Im(w) = -a$.

Por lo tanto, tenemos que encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $5 + a = -2$, y $3b - 1 = -a$. De esta manera, $a = -7$, y por consiguiente, $3b - 1 = -(-7) = 7$. Por último, $3b = 8$, es decir $b = \frac{8}{3}$.

Respecto del ítem 4, por cálculos elementales sabemos que, como $i^2 = -1$ por construcción, entonces $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$.

Así, $i^{24} = (i^4)^6 = 1^6 = 1$, ya que $24 = 6 \cdot 4$. Además, como $178 = 44 \cdot 4 + 2$, deducimos que $i^{178} = (i^4)^{44} \cdot i^2 = 1^{44} \cdot i^2 = -1$. Por último, tenemos que $321 = 80 \cdot 4 + 1$. Así, $i^{321} = (i^4)^{80} \cdot i = i$.

Por estos cálculos, conjeturamos que si se divide por 4 un número natural m, los posibles restos son $0, 1, 2$ o 3. Se espera que los estudiantes propongan algunos ejemplos. Así, si escribimos m como $m = 4n$, el resto de dividir a m por 4 es cero, entonces $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$. En cambio, si $m = 4n + 1$, es decir, el resto de dividir m por 4 es 1, entonces $(i^4)^n \cdot i^1 = i$. De la misma manera, si $m = 4n + 2$, entonces $(i^4)^n \cdot i^2 = -1$. Por último, $i^{4n+3} = (i^4)^n \cdot i^3 = -i$.

Luego, para resolver el ítem 5, debemos tener en cuenta que si un número complejo está escrito en la forma $z = a + bi$, la forma binómica de z, entonces $Re(z) = a$ y $Im(z) = b$. Así, para contestar esta pregunta debemos escribir cada número complejo en su forma binómica y, a partir de allí, reconocer su parte real y su parte imaginaria.

Usando la conjetura del ítem anterior y como $21 = 4 \cdot 5 + 1$, sabemos que $i^{21} = i$. Así, $w = 6i^{21} + 2$ se puede escribir de la forma $w = 6i + 2 = 2 + 6i$, por lo que $Re(w) = 2$ y $Im(w) = 6$. Por otro lado, como $i^2 = -1$, entonces $z = 5 - 3i^2 = 5 - 3 \cdot (-1) = 5 + 3 = 8 = 8 + 0i$. De esta manera, $Re(z) = 8$ y $Im(z) = 0$.

Observemos también que $zw = (2 + 6i)8 = 16 + 48i$. Así, concluimos que la parte real $Re(zw) = 16$ y la parte imaginaria $Im(zw) = 48$. Además, como $z - w = 8 - (2 + 6i) = 8 - 2 - 6i = 6 - 6i$, entonces $Re(z - w) = 6$ y $Im(z - w) = -6$.

1.2.2. Guía de problemas

Ejercicio 1.2.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, la forma $z = a + bi$ se llama la* forma binómica *del complejo z, donde $a := Re(z)$ y $b = Im(z)$. Escribir cada número complejo en su forma binómica e indicar la parte real y la parte imaginaria de cada uno.*

a) $z_1 = 3(2 + i)$

b) $z_2 = (1 - i) + (2 + i)$

c) $z_3 = (1 + 2i)(2 + i)$

d) $z_4 = (1 + 2i)(2 - i)^2$

e) $z_5 = i^{29} + 3i^{18}$

Ejercicio 1.2.2. *Escribir en forma binómica los siguientes números complejos.*

a) $(2+2i)-(1-i)$ *c)* $2i(1-i)(4+i)$

b) $(1+i)^2-(i-1)^2$ *d)* $(1+i+i^2+i^3)^{10}$

Ejercicio 1.2.3. *Encontrar la forma binómica del número complejo z en cada caso.*

a) $z+(-i+1)=1+4i$ *b)* $-2z=1+i$ *c)* $(i-z)+(2z-4i)=1+i$

1.2.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 1.2.1, para escribir en su forma binómica cada número complejo presentado, usamos las operaciones vistas en $\mathbb{C}$.

Usando la propiedad distributiva, transformamos $z_1=3(2+i)$ en $z_1=6+3i$. De esta manera tenemos que $Re(z_1)=6$ y $Im(z_1)=3$.

Realizando la suma entre números complejos, tenemos que $z_2=(1-i)+(2+i)$ es $z_2=3$. De aquí, $Re(z_2)=3$ y $Im(z_2)=0$.

Por la propiedad distributiva, $z_3=(1+2i)(2+i)$ es $z_3=2+i+4i+2i^2=2+5i-2$, pues $i^2=-1$, por construcción. Por lo que concluimos que $z_3=5i$. La parte real es 0 y la parte imaginaria es 5.

En el siguiente número complejo, como $(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$, entonces el número complejo $z_4=(1+2i)(2-i)^2$ se escribe como $z_4=(1+2i)(3-4i)=11+2i$, por lo que $Re(z_4)=11$ e $Im(z_4)=2$.

Por último, para encontrar la forma binómica del número complejo $z_5=i^{29}+3i^{18}$, primero tenemos que realizar las operaciones i^{29} e i^{18}. Como $i^2=-1$ y, por lo tanto, $i^4=1$, entonces, $i^{29}=(i^4)^{28}\cdot i=1^{28}\cdot i=i$.

De la misma manera, $i^{18}=(i^4)^4\cdot i^2=i^2=-1$. Por lo tanto, reemplazando estos dos valores, deducimos que $z_5=i+3(-1)=-3+i$. Así, la parte real es $Re(z_5)=-3$ y la parte imaginaria es $Im(z_5)=1$.

Finalmente, en el ejercicio 1.2.3 debemos encontrar la forma binómica de z para cada uno de los casos planteados.

En el ítem (a) hay que encontrar z para que se cumpla la igualdad

$$z+(-i+1)=1+4i.$$

Tenemos dos posibilidades. Una, despejar como si fuera una ecuación en

$$\mathbb{C} : z = 1 + 4i - (-i + 1) = 1 + 4i + i - 1 = 5i.$$

Otra, escribir z en su representación binómica $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y encontrar los valores de a y b:

$$(a + bi) + (-i + 1) = 1 + 4i$$

o, lo que es lo mismo,

$$(a + 1) + (b - 1)i = 1 + 4i.$$

Así, tenemos que $a + 1 = 1$ y que $b - 1 = 4$. De la misma manera, $a = 0$ y $b = 5$. Por lo que concluimos que, $z = 5i$.

Asimismo, se puede encontrar z tal que $-2z = 1 + i$. Por un lado, despejando, tenemos que $z = \frac{-1}{2}(1 + i) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$. Por otro lado, si escribimos a $z = a + bi$, tenemos que

$$-2(a + bi) = (-2a) + (-2b)i = 1 + i.$$

Así, $-2a = 1$ y $-2b = 1$. De acuerdo con esto, $a = \frac{-1}{2}$ y $b = \frac{-1}{2}$.

1.3. Representación geométrica de los números complejos y sus operaciones

El siguiente problema permite, a partir de una nueva representación de los números complejos, dar una interpretación geométrica de la suma y de la multiplicación de números complejos.

1.3.1. Problema modelo

Parte 1

Sean $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 2 + i$ dos números complejos.

a) Usando Geogebra, representar ambos números en el mismo sistema de ejes cartesianos.

b) Una vez graficados, sumarlos en forma analítica.

c) Encontrar una manera gráfica de realizar la suma entre los complejos anteriores. Si no se encuentra, explorar con otros números complejos y llegar a una conclusión.

d) Usando Geogebra, realizar una construcción que permita sumar dos números complejos cualesquiera de la forma $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Escribir de manera ordenada una lista de procedimientos para hacer la construcción.

Parte 2

Sea el número complejo $z = 1 + i$.

a) Graficar dicho número en Geogebra.

b) Multiplicar z por $k \in \mathbb{R}$. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por k.

c) Multiplicar z por potencias de i. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al realizar dicha multiplicación.

d) Multiplicar z por el complejo $w = ki$ con $k \in \mathbb{R}$. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por w.

e) Al realizar la última multiplicación representada en el plano complejo, indicar de qué manera se la puede relacionar con las gráficas de las multiplicaciones realizadas en las actividades anteriores.

Resolución del problema modelo

Para resolver este problema se pide usar Geogebra. Como se indicó en la Introducción, ese programa se baja de su sitio web: https://www.geogebra.org/download?lang=es. Para celulares con sistema Android, se descarga desde Play Store.

Comenzamos resolviendo la parte 1. Para representar los números complejos en Geogebra, usamos la opción Punto de la barra de herramientas y hacemos clic en la opción Número complejo. Moviendo el cursor, ubicamos los números complejos $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 2 + i$. Observemos que, por ejemplo, z_1 indica que tenemos 1 en la parte real y 3 en la parte imaginaria. Cabe señalar que Geogebra representa los números complejos en forma vectorial, así $z_1 = (1, 3)$ (vector con inicio en el origen y extremo en el punto $(1, 3)$; en nuestro caso, 1 se representa en el eje X y 3 se representa en el eje Y). Si observamos en la Vista Algebraica veremos dichos complejos escritos en su forma binómica.

Para calcular la suma de los dos números complejos de manera analítica, donde dice Entrada escribimos:

$$z_1 + z_2.$$

De esta manera, vamos a ver que la suma es

$$z_3 := z_1 + z_2 = 3 + 4i.$$

Gráficamente, esto corresponde a la diagonal de un paralelogramo de lados z_1 y z_2, cuyo vértice es el origen de coordenadas. Para realizar de manera gráfica esta operación Suma, primero debemos ubicar, usando la opción Punto, los complejos z_1 y z_2. Luego, con la opción Vector, debemos trazar las flechas que salen del origen de coordenadas, que llamamos previamente $z_4 = 0 + 0i$ y cuyos extremos finales son z_1 y z_2, respectivamente. Luego, debemos construir el paralelogramo, cuyos dos lados consecutivos ya tenemos, son los complejos z_1 y z_2. A continuación, construimos los otros dos lados. Observemos en este punto que, para construir el lado paralelo al lado correspondiente al complejo z_1, tenemos que construir una recta paralela a la que pasa por el complejo z_1, pero trasladada al extremo del vector z_2. En este punto, podemos hacer clic en la opción Recta paralela a un punto, en el menú de Herramientas, y graficar la recta g, recta que es paralela a la que pasa por los puntos extremos de los complejos z_1 y z_4, pero trasladada al extremo del vector z_2. Construimos de la misma manera la recta f, que corresponde a la recta paralela a la que pasa por los extremos de los complejos z_2 y z_4, pero trasladada al extremo del complejo z_1. Así, tenemos un punto de intersección entre las rectas f y g, intersección que corresponde al extremo del vector suma $z_3 = z_1 + z_2$.

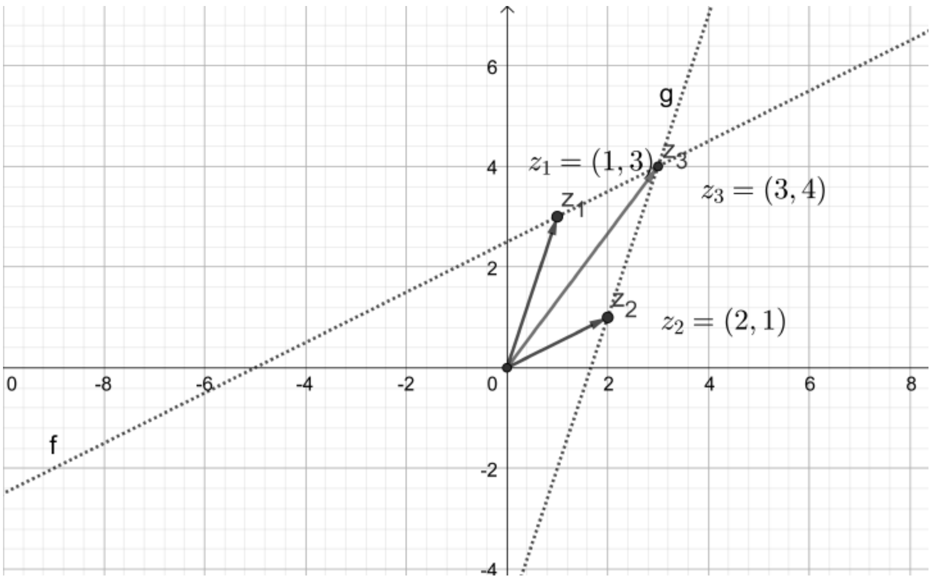


Figura 1.2

En este gráfico también se observa que los complejos pueden escribirse en forma vectorial. Por ejemplo, Geogebra escribe el complejo $z_1 = 1 + 3i$ como $z_1 = (1, 3)$.

Para resolver el ítem d) de la primera parte del problema, se necesita crear deslizadores y armar, al igual que antes, la suma geométrica de los complejos genéricos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Para ello, se escriben los complejos z_1 y z_2 genéricos en la barra de entrada de la vista algebraica. En ese punto, Geogebra pide crear deslizadores para los números reales a, b, c, d y luego, del mismo modo que antes, construir el paralelogramo teniendo en cuenta que su diagonal resulta de la operación Suma $z_1 + z_2$. Se espera que los estudiantes realicen esta construcción geométrica por su cuenta.

A continuación, resolveremos la parte 2 del problema modelo. Haciendo construcciones con Geogebra, se intentará llegar a las siguientes conclusiones, de las cuales explicaremos algunas, pues se espera que los estudiantes expliquen las otras sobre la base de lo presentado.

Al multiplicar el complejo $z = 1 + i$ por un escalar $k \in \mathbb{R}$, el módulo del vector z sufre una contracción si $k \in (-1, 1)$ o una extensión si lo multiplicamos por $k \in \mathbb{R} - (-1, 1)$. Es decir, por ejemplo, el vector que representa el complejo $\frac{1}{2}z$ es más corto que el vector que representa el complejo z; mientras que $3z$ es un vector más largo que el vector que representa el complejo z. Si, en cambio, hacemos $\frac{-1}{2}z$, el vector que representa este complejo es más corto que el vector z, pero cambió el sentido. Por otro lado, si hacemos $-3z$, el vector que representa este complejo es más largo que el vector que representa z, pero cambió el sentido.

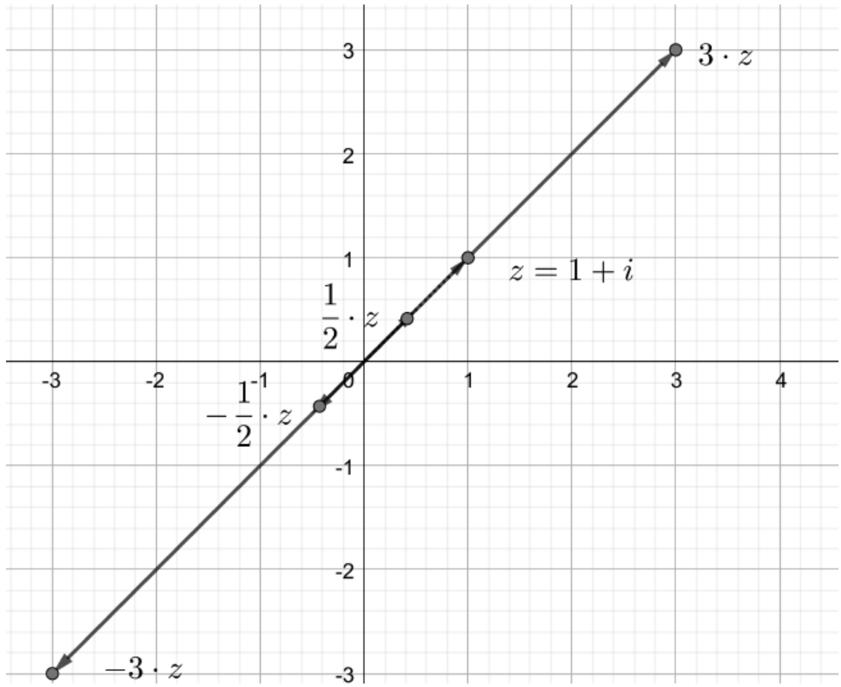


Figura 1.3

Concluimos, entonces, que no solo hay un estiramiento (o no), sino también un cambio de sentido. Esto se verá más claro cuando retomemos vectores. Más precisamente, si hacemos la operación kz, llegamos a estas conclusiones:

- Si k es positivo pero $k \in (0, 1)$, el vector que representa kz no cambia el sentido, pero se acorta con respecto al vector que representa el complejo z.
- Si k es positivo y k es mayor que 1, entonces el vector que representa kz no cambia el sentido pero es más largo que el vector que representa z.
- Si k es negativo, el vector que representa kz cambia el sentido con respecto a z, y se acorta si $k \in (-1, 0)$ o se alarga si k es menor que -1.

Más adelante, cuando representemos el complejo en su forma trigonométrica, se comprenderán estos conceptos más profundamente.

Al multiplicar z por potencias de i, esperamos que se visualice una regularidad en la gráfica, ya que solo se tendrán 4 posiciones del número complejo, en las que el ángulo que se forma entre el eje X positivo y el vector que representa el complejo z

va variando de 90^o en 90^o; es decir, el complejo inicial variará en 90, 180, 270 o 360 grados (en el último caso, llega a la posición inicial).

En la siguiente gráfica, en la cual están representados los complejos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i\, z_1$, $z_3 = i\, z_2$ y $z_4 = i\, z_3$, se observa lo conjeturado:

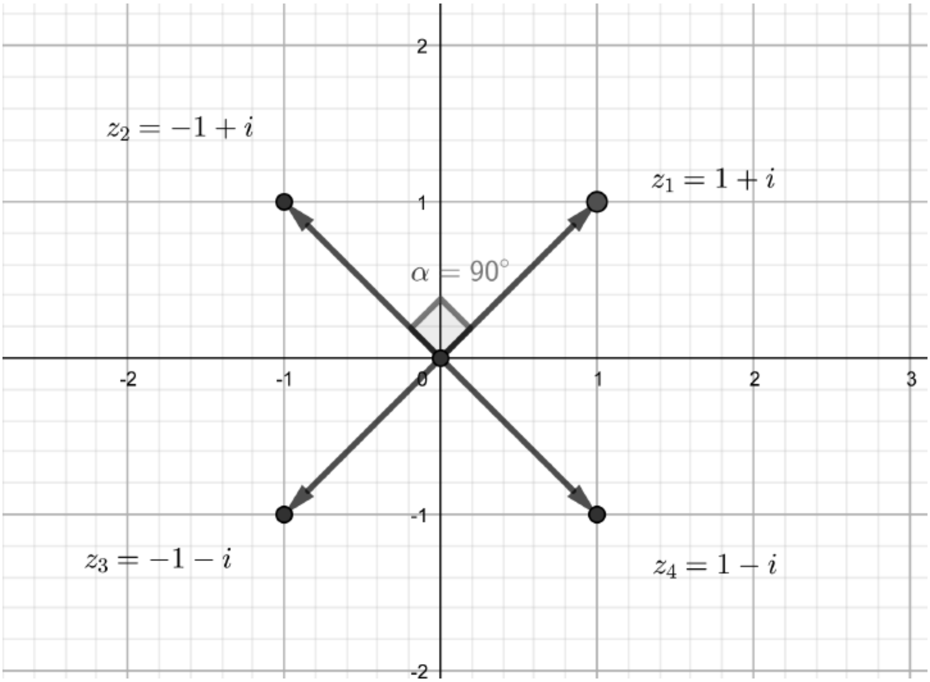


Figura 1.4

Al multiplicar un número complejo por un número imaginario, se espera que se vea que el ángulo del vector resultante varía en 90º respecto del complejo inicial (porque se multiplica por i) y, dependiendo del valor de k, que puede sufrir una contracción o una dilatación.

1.3.2. Guía de problemas

Con las actividades de esta sección se ejercitan la interpretación geométrica de los números complejos y la representación vectorial.

Ejercicio 1.3.1. *Representar cada uno de los complejos en el plano complejo:*

a) $z_1 = 1 - 2i$ *c)* $z_3 = -3 - 2i$ *e)* $z_5 = 7i$

b) $z_2 = 2 + i$ *d)* $z_4 = -1 + 2i$ *f)* $z_6 = -2$

Realizar gráficamente cada una de las operaciones que se piden y corroborar la construcción con el cálculo analítico, escribiendo el número en forma binómica:

a) $z_1 + z_2$ *c)* $z_5 - z_6$ *e)* $-z_4$

b) $(z_1 + z_2) + z_3$ *d)* $z_4 - z_3$

Ejercicio 1.3.2. *Resolver gráficamente las siguientes operaciones:*

a) $i^2(1 - i)$ *c)* $i^4 + 2i - 3$

b) $(-3)(-1 + i)\,i^3$ *d)* $(1 + i)(1 - i)$

1.4. Invariantes asociados a los números complejos

El siguiente problema modelo permite explorar ciertos invariantes de los números complejos, por ejemplo, el conjugado de un número complejo, su módulo; y algunas relaciones y propiedades. A partir de este trabajo, es posible deducir cómo dividir dos números complejos.

1.4.1. Problema modelo

1. Sean $z = 5 - 3i$ y $w = -1 + i^7$ dos números complejos. Resolver las siguientes consignas:
   a) Relacionar $\overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z + w}$.
   b) Relacionar $\overline{z} \cdot \overline{w}$ y $\overline{z \cdot w}$.
   c) Relacionar $|z| \cdot |w|$ y $|z \cdot w|$. Esta relación se debe a una propiedad de los números reales. ¿Cuál es?

   Escribir una conjetura para cada ítem anterior y demostrarla para cualesquiera z y w dos números complejos.
2. Probar las siguientes propiedades:
   a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
   b) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ distinto de cero.

A partir de estas propiedades, ¿cómo se puede calcular la división entre dos números complejos? Es decir, dado z y w dos números complejos, ¿cómo se puede calcular $\frac{z}{w}$?.
Calcular $\frac{5+2i}{1-4i}$.
3. ¿Es posible encontrar todos los números complejos cuyo módulo sea 1? ¿Es posible encontrar una representación gráfica de todos estos números complejos?

Resolución del problema modelo

Empezamos resolviendo el ítem 1. Sean $z = 5 - 3i$ y $w = -1 + i^7 = -1 - i$. Recordemos la definición de conjugado de un número complejo: Sea $z = a + bi$, entonces su conjugado es $\overline{z} = a - bi$. Así tenemos que $\overline{z} = 5 + 3i$ y $\overline{w} = -1 + i$. Por un lado,

$$\overline{z} + \overline{w} = 4 + 4i$$

y, por otro, como $z + w = 4 - 4i$, entonces,

$$\overline{z + w} = 4 + 4i.$$

De estas dos cuentas, parece valer que

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{1.1}$$

Para resolver el ítem b), tenemos que calcular, por un lado, $\overline{z} \cdot \overline{w}$ y, por otro, $\overline{z \cdot w}$. Observemos que $z \cdot w = (5-3i) \cdot (-1-i) = -8-2i$. Así, deducimos que $\overline{z \cdot w} = -8+2i$. Además, $\overline{z} \cdot \overline{w} = (5 + 3i) \cdot (-1 + i) = -8 + 2i$. De estas cuentas podemos conjeturar:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \tag{1.2}$$

Recordemos la definición de módulo de un número complejo: Si $z = a + bi$, entonces su módulo es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En el ítem c) tenemos que $|z| = \sqrt{34}$ y $|w| = \sqrt{2}$. Así, por la propiedad de los números reales que dice que, si $a, b \in \mathbb{R}$ no negativos, entonces,

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

deducimos que $|z| \cdot |w| = \sqrt{34} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{68}$, que corresponde a $|z \cdot w|$. De esta manera conjeturamos la siguiente relación entre los módulos de la multiplicación de dos números complejos:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \tag{1.3}$$

Para terminar con este ejercicio, y según las conjeturas dadas en los ítems a), b) y c), en el último ítem se pide realizar una demostración para cualesquiera dos números complejos. En este sentido, tenemos que demostrar nuestras conjeturas para todos los posibles valores complejos.

Empecemos probando (1.1). Dados $z = a + bi$ y $w = c + di$ la escritura de dos números complejos cualesquiera, con a, b, c y d números reales, tenemos que $z + w = (a + c) + (b + d)i$. Luego, por la definición de conjugado de un número complejo,

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i.$$

Por otro lado, $\overline{z} = a - bi$ y $\overline{w} = c - di$. Así, deducimos que

$$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i.$$

De estas dos cuentas deducimos que $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Demostremos ahora la conjetura (1.2). Por la definición de multiplicación de dos números complejos, sabemos que $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Así, por el conjugado de un número complejo, vemos que

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

También,

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

De esta manera, deducimos que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Probemos la última conjetura. Como $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, entonces

$$|z \cdot w|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

Además, $|z|^2 = a^2 + b^2$ y $|w|^2 = c^2 + d^2$. Luego, concluimos que

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2),$$

que, desarrollando esta multiplicación de números reales, deducimos que $|z|^2 \cdot |w|^2 = |z \cdot w|^2$.

Probemos el ítem 2) del problema modelo. Sea $z = a + bi$ cualquier número complejo, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Por un lado,

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{1.4}$$

Por otro lado,

$$|z|^2 = a^2 + b^2. \tag{1.5}$$

Llegamos así a demostrar la parte a) de este ítem.

En 2 a), deducimos que si z es no nulo, entonces $|z|$ es no nulo, más aún, es positivo. De (1.4) y (1.5) tenemos que

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Así, el complejo $w := \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ es distinto de cero y cumple que $z \cdot w = 1$. Por otro lado, dado z un número complejo no nulo, z^{-1} indica el único número complejo no nulo tal que multiplicado por z da 1. Es decir, $z \cdot z^{-1} = 1$. De esta manera, deducimos que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

A partir de esta última propiedad es posible deducir cómo se dividen dos números complejos. Más precisamente, dados $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos, con w no nulo:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = z\frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}.$$

Así, para calcular $\frac{5+2i}{1-4i}$, hacemos

$$\frac{5+2i}{1-4i} = \frac{(5+2i)(1+4i)}{17} = \frac{-3+22i}{17}.$$

Dejamos de tarea observar que a partir de estas cuentas, podemos justificar lo que se veía en la escuela secundaria para calcular la división $\frac{5+2i}{1-4i}$, donde el docente explicaba que había que multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

Por último, en el ítem 3 la consigna se refiere a los $z \in \mathbb{C}$, tales que $|z| = 1$. Estos complejos $z = x + yi$ satisfacen que $x^2 + y^2 = 1$, es decir, pertenecen a la circunferencia unitaria de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. A continuación, se lo muestra en un gráfico desarrollado con Geogebra:

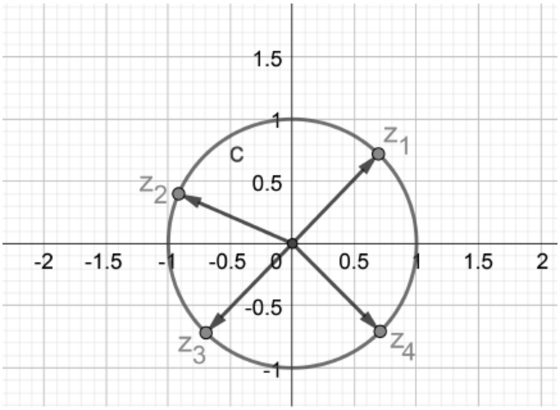


Figura 1.5

1.4.2. Guía de problemas

Con los ejercicios de esta sección se estudian algunos invariantes de un número complejo, por ejemplo, su módulo y conjugado, y algunas de sus relaciones y propiedades.

Ejercicio 1.4.1. *Resolver las consignas para cada uno de los siguientes complejos.*

a) $z_1 = 1 - 2i$

b) $z_2 = 2 + i$

c) $z_3 = -3 - 2i$

d) $z_4 = -1 + 2i$

e) $z_5 = 7i$

f) $z_6 = -2i$

1. *Representar cada número complejo en el plano complejo.*
2. *Calcular el módulo de cada número complejo.*
3. *Calcular el conjugado y el opuesto aditivo de cada número complejo.*
4. *Graficar en el plano complejo cada uno de los complejos del ítem anterior.*
5. *Observando los ejemplos de los ítems anteriores, indicar la relación que existe entre un número complejo cualquiera z con su complejo conjugado $\overline{z}$ y con su opuesto $-z$.*

Ejercicio 1.4.2. *Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, dos números complejos cualesquiera, graficar las siguientes operaciones sin calcularlas previamente:*

a) $\overline{z}$

b) $-z$

c) $2z$

d) $-3w$

e) $-\overline{w}$

f) $z+w$

g) $\overline{z}-\overline{w}$

h) $w-z$

i) $\overline{z-w}$

Ejercicio 1.4.3. *Explorar con Geogebra e indicar si esta afirmación es válida para todo k real y para todo z complejo:*

$$|kz| = k|z|$$

Ejercicio 1.4.4. *Proponer 3 ejemplos de números complejos z y resolver las siguientes consignas con cada uno.*

a) *Calcular el conjugado* $\overline{z}$ *de z.*

b) *¿Es posible que* $|z|$ *sea igual al módulo de* $|\overline{z}|$*?*

c) *¿Cuánto vale el conjugado de* $\overline{z}$*?*

¿Se pueden generalizar los cálculos realizados para todo número complejo? Escribir las propiedades que se encontraron.

1.4.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

A continuación resolveremos el ejercicio 1.4.3. Proponemos un ejemplo con Geogebra, es tarea del estudiante resolver sus ejemplos.

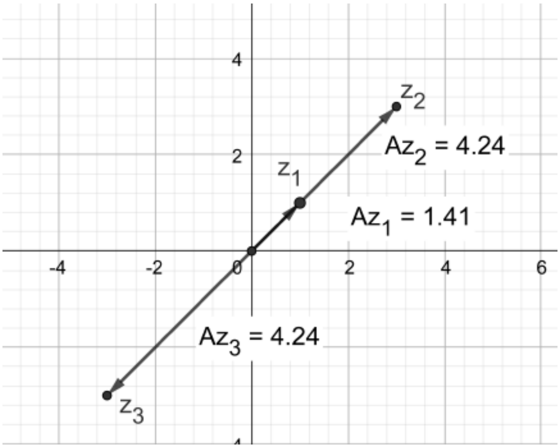


Figura 1.6

En este ejemplo se observa que $z_1 = 1 + i$. Si $k = 3$, entonces $z_2 = 3z_1$ cumple que $|z_2| = |3z_1| = 3|z_1| = 3\sqrt{2}$.

En cambio, si tomamos $k = -3$, entonces $z_3 = -3z_1$ cumple que $|z_3| = |3z_1| = 3\sqrt{2}$, mientras que $-3|z_1|$ es negativo. De esta manera, se concluye que la afirmación

$$|kz| = k|z|,$$

no se cumple para los valores de k negativos.

En el ejercicio 1.4.4, si tomamos, nuevamente, $z = 1 + i$, tenemos que $\overline{z} = 1 - i$. En este sentido, observamos que

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{2}.$$

Además, el conjugado de $\overline{z}$ es igual a z:

$$\overline{\overline{z}} = \overline{1 - i} = 1 + i = z.$$

Las regularidades observadas valen para todo número complejo, por lo que tienen un carácter de propiedad. Más precisamente, las propiedades son las siguientes:

Proposición 1.4.5. *Sea $z = a + bi$ un número complejo cualquiera, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

a) $|z| = |\overline{z}|$.

b) $\overline{\overline{z}} = z$.

Es tarea de los estudiantes esbozar una demostración para cualquier número complejo.

1.5. La forma trigonométrica de un número complejo

El problema modelo tiene como objetivo trabajar con otra representación de los números complejos, la forma trigonométrica. Esta nueva representación tiene la ventaja de resolver ciertas operaciones más fácilmente.

1.5.1. Problema modelo

1. ¿Cuáles son el módulo y el argumento de los complejos $z_1 = i$ y $z_2 = -i$?
2. ¿Cúales son el módulo y el argumento de $z = 1 + \sqrt{3}i$? A partir de estos valores, escribir la forma trigonométrica de un número complejo z.
3. Tomando en cuenta el módulo y el argumento del complejo de 2, ¿cuáles son las representaciones trigonométricas de los siguientes números complejos?

- $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$
- $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
- $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$

Resolución del problema modelo

Observemos que, para el ítem 1 del problema modelo, $|z_1| = |z_2| = 1$. Para calcular los argumentos de ambos números complejos observamos sus representaciones gráficas en el plano complejo.

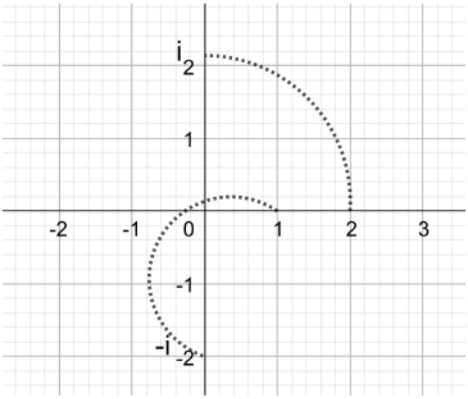


Figura 1.7

Para calcular el argumento de un número complejo, tenemos que recordar ciertas propiedades de trigonometría vistas en el nivel secundario.

Si $z \neq 0$, existe un único ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que

$$cos(\alpha) = \frac{Re(z)}{|z|}, \quad sen(\alpha) = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Decimos que α es el argumento de z y escribimos $\alpha = \arg(z)$. Observemos que el argumento de z es el ángulo que forma el segmento que une z con el origen y el eje positivo.

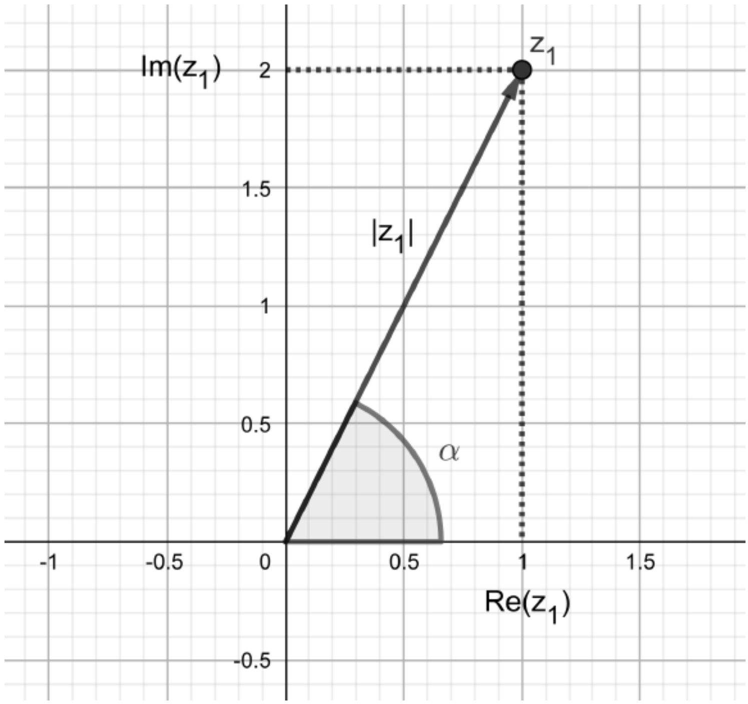


Figura 1.8

Así, para calcular el argumento de los complejos z_1 y z_2, vemos en la gráfica que $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg(z_2) = \frac{3}{2}\pi$.

Para resolver el ítem 2), primero tenemos que calcular el módulo y el argumento de $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Por un lado, tenemos que $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ y, por otro lado,

$$cos(\arg(z)) = \frac{1}{2},$$

por lo que deducimos que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

Para encontrar la forma trigonométrica de un número complejo z, tenemos que encontrar $|z|$ y su argumento. Más precisamente, la forma trigonométrica de $z = a + bi$ es

$$z = |z|(cos(\alpha) + isen(\alpha)),$$

donde $\alpha = \arg(z)$.

Así tenemos que la forma trigonométrica de z es

$$z = 2\big(cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})\big).$$

A partir del argumento de z, es posible calcular el de cada complejo del ítem 3).

Observemos que la representación gráfica del número complejo z_1 se encuentra en el segundo cuadrante:

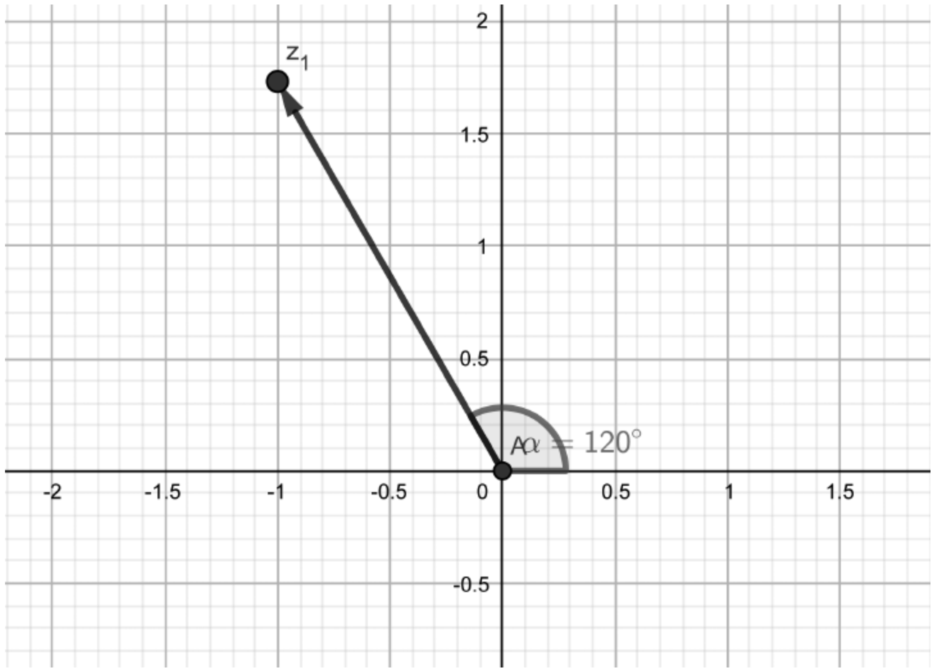


Figura 1.9

Por lo tanto, $\arg(z_1) = \pi - \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Además, como el número complejo z_2 se puede graficar en el tercer cuadrante del plano complejo, entonces, $\arg(z_2) = \pi + \arg(z) = \frac{4\pi}{3}$.

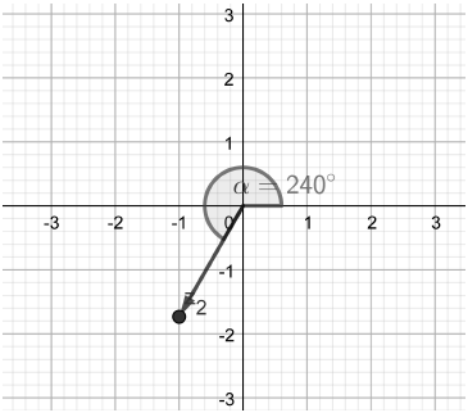


Figura 1.10

Por último, como z_3 se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo, entonces $\arg(z_3) = 2\pi - \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

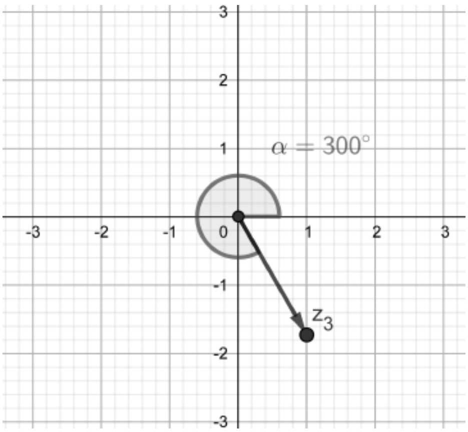


Figura 1.11

Todos estos números complejos tienen el mismo módulo que z. De esta manera, concluimos que las formas trigonométricas de estos complejos son:

- $z_1 = 2(cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}))$,
- $z_2 = 2(cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}))$,
- $z_3 = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3}))$.

1.5.2. Guía de problemas

Estos ejercicios están pensados para trabajar con la forma trigonométrica de un número complejo.

Ejercicio 1.5.1. *Dados $z = a + bi$ y $w = di$ dos números complejos cualesquiera, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, resolver las siguientes consignas:*

a) ¿Existe alguna relación entre los módulos de los complejos z y w, y la multiplicación de ellos?

b) ¿Existe alguna relación entre los argumentos de los complejos y la multiplicación de ellos?

c) ¿Qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por w?

Ejercicio 1.5.2. *Sean $z = \frac{(2+i+i^2)^2-(6-2i)^2}{i(1-i)^{10}}$ y $w = (1+i)^5 + i^{85}$. Resolver usando Octave.*

a) Calcular el módulo de z y el argumento de z. Observar que Octave presenta el $\arg(z)$ en radianes.

b) Escribir el complejo z en su forma trigonométrica.

c) Encontrar la parte real y la parte imaginaria del conjugado de z.

d) Calcular $z \cdot \bar{z}$ y conjeturar observando el cálculo del módulo de z.

e) Calcular $z \cdot w$ y $z - w$.

Ejercicio 1.5.3. *Proponer 3 ejemplos y resolver las consignas usando Geogebra.*

(a) ¿Qué ocurre con un número complejo cualquiera cuando se lo divide por su opuesto?

(b) ¿Qué ocurre con un número complejo cualquiera cuando se lo divide por su conjugado?

(c) ¿Qué ocurre con un número complejo cualquiera cuando se lo divide por la unidad imaginaria i?

Ejercicio 1.5.4. *Hallar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, y escribirlos en forma trigonométrica.*

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) $z_3 = -\sqrt{3} + i$

d) $z_4 = 7i$

e) $z_5 = -1 - \sqrt{3}i$

f) $z_6 = -3i$

Pasar cada complejo hallado a su forma binómica.

Ejercicio 1.5.5. *Representar en el plano complejo los siguientes números complejos escritos en su forma trigonométrica. Indicar, en cada caso, el módulo y el argumento. Escribir cada número en su forma binómica.*

a) $z_1 = 2(cos(\pi) + isen(\pi))$

b) $z_2 = 3\left(cos(\frac{3\pi}{2}) + isen(\frac{3\pi}{2})\right)$

c) $z_3 = \left(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})\right)$

d) $z_4 = 3\left(cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})\right)$

1.5.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 1.5.1 se observa, mediante Geogebra, que el argumento del número complejo resultante de la multiplicación de $(a + bi) \cdot di$ es igual a la suma de los argumentos de los complejos iniciales, y el módulo del complejo resultante de la multiplicación es igual a la multiplicación de los módulos de los complejos iniciales. Más precisamente, si $\arg(z) = \alpha$, entonces $\arg(zw) = \alpha + \frac{\pi}{2}$; y $|zw| = |z||w|$.

Para resolver el ejercicio 1.5.3, debemos usar los siguientes comandos de Octave:

- real(z) devuelve la parte real de un número complejo e imag(z) devuelve la parte imaginaria de un número complejo;
- abs(z) devuelve el módulo de un número complejo;
- angle(z) devuelve el ángulo de un número complejo en radianes;
- conj(z) devuelve el conjugado de un número complejo.

Realizamos los cálculos con Octave y obtenemos lo siguiente:

```
z=((2+i+i^2)^2-(6-2*i)^2)/(i*(1-i)^10)
z = -1.00000 + 0.81250i
abs(z)
ans =  1.2885
angle(z)
```

```
ans =  2.4593
r=conj(z)
r = -1.00000 - 0.81250i
real(z)
ans = -1.00000
imag(z)
ans =  0.81250
z*r
ans =  1.6602
abs(z)^2
ans =  1.6602
w=(1+i)^5+i^85
w = -4.0000 - 3.0000i
z*w
ans =  6.43750 - 0.25000i
z-w
ans =  3.0000 + 3.8125i
```

Mediante los cálculos que se realizaron, observamos que la forma trigonométrica de z es:

$$z = |z| \cdot (cos(\arg(z)) + i \cdot sen(\arg(z))) \quad |z| = 1.2885 \quad \arg(z) = 2.4593.$$

Notamos también que $\overline{z} \cdot z = |z|^2$.

Por último, en el ejercicio 1.5.5, la forma binómica de z_1 es

$$z_1 = 2(-1 + 0i) = -2.$$

Y la forma binómica de z_2 es

$$z_2 = 3(0 - i) = -3i.$$

La forma binómica de z_3 es

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Es tarea del estudiante encontrar la forma binómica de z_4.

1.6. Teorema de De Moivre y sus aplicaciones

El problema modelo que sigue se pensó para trabajar con ciertas propiedades de los números complejos cuando están escritos en su forma trigonométrica. Estas propiedades, que están basadas en la fórmula de De Moivre, permiten contestar ciertas preguntas que serían mucho más difíciles de responder con otra representación del número complejo.

1.6.1. Problema modelo

Parte 1

Escribir tres ejemplos de números complejos z y w en Geogebra. Resolver las consignas que siguen para los tres ejemplos:

a) ¿Existe alguna relación entre los módulos de z y w, y el de la multiplicación?

b) ¿Existe alguna relación entre los argumentos z y w, y el de la multiplicación?

c) Encontrar una relación entre los módulos y argumentos de z, y el de z^2; también con el de z^3.

Parte 2

Sea el número complejo $w = 1 + i$.

a) Escribir en Geogebra la representación trigonométrica o polar de w. En la vista gráfica, dibujar el vector w y su argumento. Para dibujar el argumento, usar la opción Ángulo que se encuentra en la barra de herramientas.

b) Calcular con Geogebra una raíz cuadrada de w con el comando $sqrt(w)$ y escribirla en su forma polar. Dibujar el vector y su ángulo. Encontrar una relación entre el módulo y el argumento de w con el módulo y el argumento de la raíz cuadrada encontrada. ¿Cómo se puede calcular con Geogebra la otra raíz cuadrada de w?

Parte 3

a) Dado $w = 1 + i$, ¿cómo se puede calcular w^{124}? ¿Y w^{-124}?

b) Calcular de dos maneras las raíces cuadradas de $w = 1 + i$.

Resolución del problema modelo

Para resolver la parte 1, podemos hacer construcciones con el objetivo de encontrar regularidades. Tomamos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 3i$. En este caso, el producto $z_1 \cdot z_2$ es $prod = -3 + 3i$.

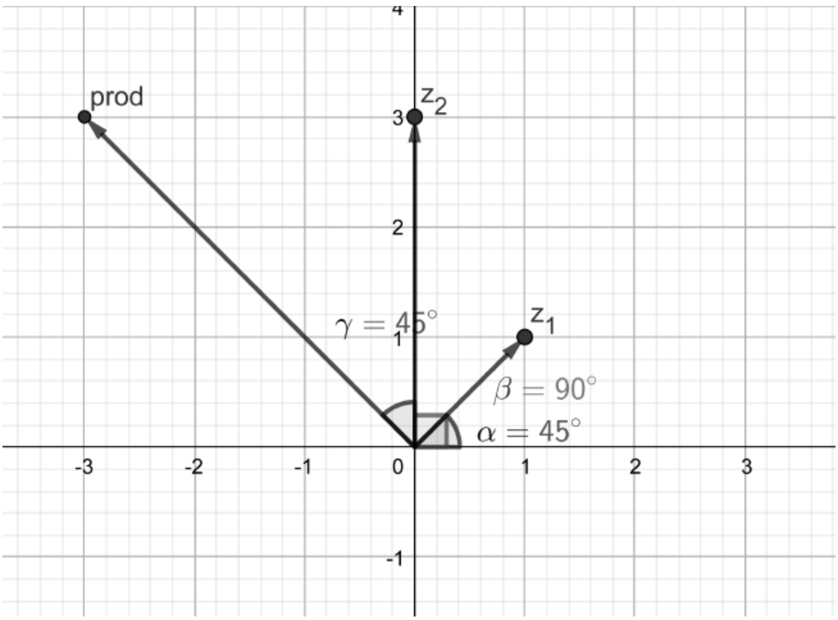


Figura 1.12

Mediante este ejemplo, y otros que se pueden construir, observamos que si z y w son dos complejos cualesquiera, entonces

$$|z||w| = |z\,w|. \tag{1.6}$$

En el ejemplo, $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 3i$. Así $|z_1| = \sqrt{2}$, mientras que $|z_2| = 3$. Por un lado, tenemos que

$$|z_1||z_2| = 3\sqrt{2} \approx 4.24$$

y por otro tenemos que, $|z_1\,z_2| = 3\sqrt{2}$. Así concluimos que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

En cuanto a encontrar una relación entre los argumentos de dos números complejos z_1 y z_2 con el argumento del producto $z_1 z_2$, observamos en el ejemplo que $\arg(z_1) = 45^o = \frac{\pi}{4}$, mientras que $\arg(z_2) = 90^o = \frac{\pi}{2}$. Así tenemos que $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ $(135^o = 45^o + 90^o)$. Por lo que concluimos que $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ coincide con $\arg(z_1\,z_2)$.

Tomemos otro ejemplo, si $z = 1 + i$ y $w = 1 - i$, entonces, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg(w) = \frac{3}{2}\pi$. Tenemos también que $z\,w = (1+i)(1-i) = 2$. De este modo, por un lado, tenemos que $\arg(z\,w) = 0$; y por otro,

$$\arg(z) + \arg(w) = 2\pi.$$

Así, concluimos que

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi.$$

Otro ejemplo que podemos tomar es $z = -i$, cuyo argumento es $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi$. Por otro lado, el argumento de $z^3 = (-i)^3 = i$ es $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$. Además, $\arg(z) + \arg(z) + \arg(z) = 3\arg(z) = \frac{9}{2}\pi$. En este punto tenemos que,

$$\arg(z^3) = 3\arg(z) - 4\pi = 3\arg(z) - 2(2\pi).$$

Del mismo modo, si tomamos $z_1 = -1-\sqrt{3}i$ y $z_2 = 1-\sqrt{3}i$, tenemos que $\arg(z_1) = \frac{4\pi}{3}$ y $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{3}$. Por otro lado, $z_1 z_2 = -4$. Así, $\arg(z_1 z_2) = \pi$. Observemos que $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$. Así, tenemos que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi$.

Mediante estos ejemplos y otros que se pueden construir, conjeturamos la siguiente regularidad. Dados z y w dos números complejos cualesquiera,

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi k, \tag{1.7}$$

con k entero.

A su vez, de (1.6) podemos conjeturar que

$$|z^2| = |z\,z| = |z|\,|z|.$$

Por un trabajo similar,

$$|z^3| = |z|^3.$$

Del mismo modo, de (1.7), observamos que

$$\arg(z^2) = \arg(z) + \arg(z) - 2\pi k = 2\arg(z) - 2\pi k,$$

con k entero. De manera similar se observa que $\arg(z^3) = 3\arg(z) - 2\pi k$, con k entero.

La parte 2 se resuelve con Geogebra.

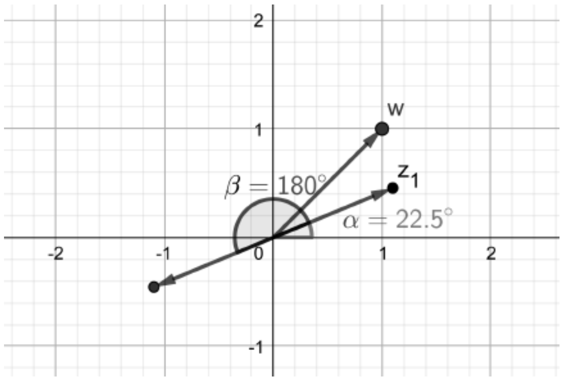


Figura 1.13

Según Geogebra, la forma trigonométrica de la raíz cuadrada de w es $\sqrt{w} = z_1$, donde $z_1 = (1,19; 22,5^o)$. Esto significa que el módulo de esa raíz cuadrada z_1 es, aproximadamente, $1,19$ y el ángulo medido en sexagesimales es, aproximadamente, $22,5^o$. En efecto, se puede probar que $|w| = \sqrt{2}$. Para calcular el ángulo de w, observemos que w está ubicado en el primer cuadrante y también que el ángulo medido en radianes es

$$\arg(w) = \frac{\pi}{4}.$$

El ejercicio pide encontrar los complejos z, tales que $z^2 = w$, es decir, encontrar las raíces cuadradas $z = \sqrt{w}$ de w. Con Geogebra vemos que una raíz cuadrada es $z_1 = (1,19; 22,5^o)$. Si queremos calcular z_1 sin usar Geogebra, es decir una raíz cuadrada de w, necesitamos calcular $\arg(z_1)$ y $|z_1|$. Para ello calculamos primeramente $\arg(w)$ y $|w|$, y luego lo relacionamos con el $\arg(z_1)$ y $|z_1|$. Más precisamente, como $|z_1|^2 = |w|$, tenemos que $|z_1| = |w|^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1,19$. Por otro lado, como $z_1^2 = w$, entonces $\arg(z_1) = \frac{\arg w}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 22,5^o$. Para calcular la otra raíz cuadrada, observemos que, para encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = w$, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$|z| = |w|^{\frac{1}{2}} \qquad \arg(z) = \frac{\arg(w)}{2} + k\pi,$$

con k entero. Por lo que deducimos que la otra raíz cuadrada z_2 de w cumple que su argumento difiere del argumento de z_1 en π, es decir, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$. Por lo tanto, deducimos que existen dos raíces cuadradas de w, y ellas son:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\pi}{8}) + isen(\frac{\pi}{8})),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{9\pi}{8}) + isen(\frac{9\pi}{8})).$$

En 3 b) debemos encontrar otro modo de calcular las raíces cuadradas de $w = 1 + i$. Para encontrar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 = w$, recordemos cuándo dos complejos escritos en su forma binómica son iguales. Así, escribiendo $z = a + bi$, tenemos que $z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Como $z^2 = w = 1 + i$, entonces, las partes reales e imaginarias de los complejos z^2 y w son iguales, es decir

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Por otra parte, por propiedad de módulos sabemos que $|z^2| = |z|^2$. Así, como z^2 es igual a w, los módulos de ambos complejos deben ser iguales, es decir $|z|^2 = |w|$, o sea

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}. \tag{1.9}$$

Sumamos la primera ecuación de (1.8) con (1.9):

$$2a^2 = 1 + \sqrt{2} \tag{1.10}$$

Si, en cambio, las restamos, tenemos la siguiente ecuación no lineal:

$$2b^2 = \sqrt{2} - 1 \tag{1.11}$$

De esta manera, tenemos cuatro posibilidades para los valores de a y b del número complejo $z = a + bi$. Es decir, $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Como sabemos que solo dos números complejos cumplen con la igualdad $z^2 = w$, usamos la otra ecuación del sistema (1.8), es decir que $2ab = 1$. De esta manera, observamos que las posibilidades son $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ y $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

En este punto, es tarea de los estudiantes verificar que estas dos posibilidades de a y b cumplen con la ecuación $ab = 1/2$. Así, los complejos que verifican que $z^2 = w$ son $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$ y $z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$. Por último, observemos que esta técnica calcula las raíces cuadradas de un número complejo en su forma binómica; mientras que el cálculo hecho anteriormente nos da los complejos en su forma trigonométrica. También queda a cargo de los estudiantes resolver el ejercicio a) parte 2.

1.6.2. Guía de problemas

En esta sección se presenta una serie de problemas y ejercicios para afianzar el conocimiento de las propiedades vistas.

Ejercicio 1.6.1. *Escribir la forma trigonométrica de cada uno de los siguientes números complejos:*

a) $z_1 = (1+i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

b) $z_2 = \frac{1+i}{(-\sqrt{3}+i)^5}$

c) $z_3 = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3$

d) $z_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{179}$

e) $z_5 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}$

f) $z_6 = (-1+\sqrt{3}i)^{-8}(2+2i)^{-1}$

Ejercicio 1.6.2. *Hallar la forma binómica de cada uno de los siguientes números complejos:*

a) $z = (-\sqrt{3}+i)^{16}(1-i)$

b) $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{(-1-i)^{31}}$

c) $z = \frac{-2i}{(1+\sqrt{3}i)^{11}}$

d) $z = 3(cos(\frac{\pi}{5}) + isen(\frac{\pi}{5}))^{15}$

Ejercicio 1.6.3. *Resolver* $z^2 = 1+\sqrt{3}i$ *de dos maneras.*

1.6.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 1.6.1 a) , d) y e) observamos que tanto los números complejos presentados en el ítem a) como en el e) pueden, mediante cálculos, escribirse en su forma binómica y, luego, reescribirse en su forma trigonométrica. Recordemos que dado un número complejo $z = a + bi$, la forma trigonométrica de dicho número es

$$z = |z|(cos(\alpha) + isen(\alpha)),$$

donde $|z|$ denota el módulo del número complejo z y α es su argumento. El módulo de z se define

$$|z| = a^2 + b^2.$$

El argumento de z es el único número α que cumple que $0 \leq \alpha < 2\pi$. Este número cumple que $cos(\alpha) = \frac{a}{|z|}$ y $sen(\alpha) = \frac{b}{|z|}$. Denotamos este número de la forma $\arg(z) := \alpha$.

Empecemos con el ítem a). Para ello, usando la propiedad distributiva y que $i^2 = -1$, tenemos que $z_1 = (\frac{-1-\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$. De aquí,

$$|z_1|^2 = (\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2.$$

Realizando los cálculos, tenemos que $|z_1|^2 = 2$, por lo que $|z_1| = \sqrt{2}$. Cuando queremos calcular el argumento de z_1, observamos que $\arg(z_1)$ cumple que $\arg(z_1) = \pi - \beta$, donde β es un número real que verifica que

$$cos(\beta) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Si usamos la calculadora, la solución es $\beta \approx 0,2617999\ldots$, por lo que $\arg(z_1) \approx 2,879793\ldots$ Sabemos que $\arg(z_1)$ es un número real que se aproxima a $2,879793\ldots$ ¿Pero qué es, exactamente, ese número? Para contestar esta pregunta tenemos que usar propiedades vistas en clase y la escritura de un número complejo en su forma trigonométrica. Más precisamente, usamos la siguiente propiedad debida a De Moivre:

Teorema 1.6.4. *Sean $z = r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ y $w = s(cos(\beta) + isen(\beta))$ dos números complejos cualesquiera. Entonces,*

$$z \cdot w = rs(cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)).$$

En particular, $\arg(z \cdot w) = \alpha + \beta - 2k\pi$*, con k algún número entero.*

Observemos que z_1 es el producto de dos números complejos. Uno de ellos es $w_1 = 1 + i$ y el otro es $w_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observemos que $|w_1| = \sqrt{2}$ y que $|w_2| = 1$; y que $\arg(w_1) = \frac{\pi}{4}$ y $\arg(w_2) = \frac{2\pi}{3}$. Así, por el teorema anterior,

$$\arg(z_1) = \arg(w_1 \cdot w_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi \approx 2.87973\ldots.$$

Mediante el cálculo de arriba tenemos, exactamente, el valor del argumento de z_1. Por lo tanto, concluimos que la forma trigonométrica de $z_1 = \sqrt{2}(cos(\frac{11\pi}{12}) + isen(\frac{11\pi}{12}))$.

Por otro lado, para calcular forma trigonométrica del número complejo $z_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2i}})^{179}$, usaremos el siguiente corolario; consecuencia del teorema anterior.

Corolario 1.6.5. *Sea $z = r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ un número complejo cualquiera. Entonces, para cualquier n entero*

$$z^n = r^n(cos(n\alpha) + isen(n\alpha)).$$

Observemos que z_4 se puede escribir como $z_4 = w_4^{179}$, donde $w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para usar el corolario anterior, escribimos w_4 en su forma trigonométrica. Queda a cargo del estudiante comprobar que $w_4 = cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})$. De esta manera,

$$z_4 = cos(\frac{179\pi}{4}) + isen(\frac{179\pi}{4}).$$

Notemos que $\frac{179\pi}{4}$ no es el argumento de z_4, ya que $\arg(z_4)$ es un número real que verifica que $\arg(z_4) \in [0, 2\pi)$. Para hallar ese número, debemos encontrar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq \frac{179\pi}{4} - 2k\pi < 2\pi$. Se observa con facilidad que $k = 22$, por lo que deducimos que $\arg(z_4) = \frac{3\pi}{4}$. Entonces escribimos $z_4 = cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})$.

Por último, escribimos la forma trigonométrica del número complejo $z_5 = (\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}$. Podemos escribirlo como $z_5 = w_5^{-1}$, donde $w_5 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Notemos que w_5^{-1} es el inverso multiplicativo de w_5, es decir que cumple que $w_5 \cdot w_5^{-1} = 1$; así, $w_5^{-1} = \frac{1}{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$. Observemos que $w_5^{-1} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Concluimos que la forma binómica de $z_5 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para escribir el número z_5 en su forma trigonométrica, tenemos que buscar el módulo y el argumento de z_5. Notemos que $|z_5|^2 = (\frac{-1}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2 = 1$, por lo que $|z_5| = 1$. También, $\arg(z_5) = \frac{4\pi}{3}$. Concluimos de este modo que la forma trigonométrica de z_5 es

$$z_5 = cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}).$$

Podemos encontrar la forma trigonométrica de $z_5 = w_5^{-1}$ usando el corolario con $n = -1$. Para ello, observamos que la forma trigonometrica de w_5 es $w_5 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$. Por lo tanto,

$$z_5 = w_5^{-1} = cos(\frac{-2\pi}{3}) + isen(\frac{-2\pi}{3}) = cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}).$$

En el ejercicio 1.6.2 d), debemos escribir el número $z = 3(cos(\frac{\pi}{5}) + isen(\frac{\pi}{5}))^{15}$ en su forma binómica. Para ello, vamos a usar el Corolario 1.6.5 con $n = 15$.

$$z = 3(cos(\frac{15\pi}{5}) + isen(\frac{15\pi}{5})) = 3(cos(3\pi) + isen(cos(3\pi)).$$

Observemos que $cos(3\pi) = cos(\pi)$ y $sen(3\pi) = sen(\pi)$, por lo que

$$z = 3(cos(\pi) + isen(\pi))$$

Como $cos(\pi) = -1$ y $sen(\pi) = 0$, entonces la forma binómica de z es $z = -3$.

1.7. Ejercicios varios

Se incluyen a continuación ejercicios para trabajar algunos aspectos de los números complejos y sus operaciones.

Ejercicio 1.7.1. *Graficar los números complejos z tales que* $|z| \leq 1$.

Ejercicio 1.7.2. *¿Es posible que* $z + \overline{z}$ *sea un número real, no importa el número complejo utilizado? Si es así, encontrar dicho número complejo.*

Ejercicio 1.7.3. *Representar gráficamente los números complejos que satisfacen las siguientes propiedades:*

a) *Todos los números complejos z tales que* $1 \leq |z| \leq 4$ *y* $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

b) *Todos los números complejos z tales que* $|z - 1| = 3$ *y* $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 1.7.4. *Calcular todos los números complejos z que satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $z \neq 0$ *y* $z = (\overline{z})^{-1}$

b) $Re(z^2) = 0$

c) $z^2 = 3 + 4i$

d) $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$

e) $z^3 = \overline{iz^2}$

f) $z^3 + 4i|z| = 0$

g) $z^2 = -1$

Ejercicio 1.7.5. *Sea* $z = 2(cos(\frac{11\pi}{2}) + isen(\frac{11\pi}{2}))$ *y w el siguiente complejo representado en el plano complejo.*

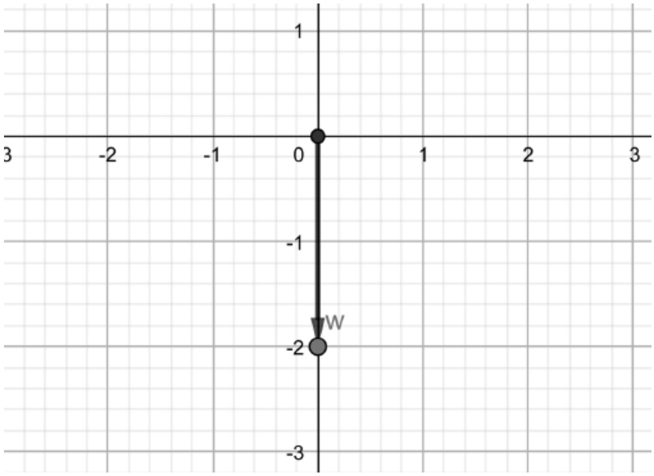


Figura 1.14

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

a) z y w tienen los mismos módulos pero distintos argumentos.

b) z y w tienen los mismos argumentos pero distintos módulos.

c) z y w son números iguales porque tienen el mismo módulo y argumento.

d) z y w son números iguales, escritos en distintas representaciones.

Resolución del ejercicio 1.7.4, ítems a), d) y e)

En el ítem a) hay que encontrar todos los z distintos de cero, tal que $z = (\overline{z})^{-1}$. Como z es distinto de cero, entonces la expresión anterior es equivalente a obtener los z tal que

$$z \cdot \overline{z} = 1. \tag{1.12}$$

Si $z = a + bi$, entonces $\overline{z} = a - bi$. Así, de (1.12), deducimos que $a^2 + b^2 = 1$. Resumiendo, los números complejos que pide el ejercicio son aquellos cuyo módulo es 1.

En el ítem d), para resolver $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$, podemos usar la fórmula resolvente que los estudiantes de la UNAUHR vieron en el curso introductorio. Así, los z que cumplen la ecuación cuadrática anterior son:

$$z = \frac{-1-2i \pm \sqrt{(1+2i)^2 - 8i}}{2} = \frac{-1-2i \pm \sqrt{-3-4i}}{2}.$$

Pero, ¿qué significa $\sqrt{-3-4i}$?¿ Qué número complejo representa? Observemos que es lo mismo que buscar los números complejos w, tal que $w^2 = -3-4i$. Si escribimos $w = a + bi$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Sumando y restando las primeras dos ecuaciones, tenemos las siguientes posibilidades para los valores de a y b: $a = \pm 1$ y $b = \pm 2$. De la ecuación $ab = -2$, deducimos que o bien $a = 1$ y $b = -2$, o bien $a = -1$ y $b = 2$. Es decir, tenemos dos posibles valores para w.

Supongamos que $w = \sqrt{-3-4i} = 1 - 2i$. Entonces,

$$z = \frac{-1-2i \pm w}{2} = \frac{-1-2i \pm (1-2i)}{2}.$$

Haciendo cuentas, concluimos que los valores de z que satisfacen la ecuación cuadrática son: $z = -2i$ y $z = -1$.

Por último, en el ítem e) buscamos z tales que $z^3 = \overline{iz^2}$. Si escribimos a $z = a+bi$ e intentamos plantear la igualdad de dos números complejos, observamos que tenemos que resolver un sistema de ecuaciones no lineales complicado. Más precisamente, tenemos que $z^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)i$ y que $\overline{iz^2} = (-2ab) + (b^2 - a^2)i$. Así por la condición de cuándo dos complejos, escritos en su forma binómica, son iguales, tenemos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2ab \\ 3a^2b - b^3 = b^2 - a^2 \end{cases}$$

Así, para hallar los números complejos $z = a + bi$ que satisfacen $z^3 = \overline{iz^2}$ debemos resolver el sistema de ecuaciones no lineales de arriba, es decir, encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ que verifican cada una de las ecuaciones del sistema anterior. Es una actividad de los estudiantes buscar una solución para dicho sistema (esta resolución puede ser difícil).

Resolvemos este problema de otra manera, aprovechando la ventaja de tenerlos escritos en su forma trigonométrica, es decir, buscamos los números complejos que cumplen $z^3 = \overline{iz^2}$ usando la escritura de z en su forma trigonométrica y propiedades que son consecuencia del Teorema de De Moivre. Notemos que una solución es $z = 0$. Supongamos que $z \neq 0$ y se escribe como $z = r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$. Por el Teorema de De Moivre,

$$z^3 = r^3(cos(3\alpha) + isen(3\alpha)). \tag{1.13}$$

Con la misma propiedad y observando que $i = cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2})$, tenemos que $iz^2 = r^2(cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) + isen(\frac{\pi}{2} + 2\alpha))$. Por lo cual,

$$\overline{iz^2} = r^2(cos(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + isen(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha)). \tag{1.14}$$

Así, para que (1.13) y (1.14) sean iguales tenemos que pedir que

$$\begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases}$$

donde k es un número entero.

Como $z \neq 0$, tenemos que $r \neq 0$. Así de $r^3 = r^2$, concluimos que $r = 1$. Por otro lado, la segunda ecuación equivale a que $\alpha = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, para algún k entero. Notemos que los posibles valores de k para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, son $k = 1, 2, 3, 4, 5$; por lo que los números complejos son $z = 0$ o $z = cos(\alpha) + isen(\alpha)$ con $\alpha = \frac{3}{10}\pi$, $\alpha = \frac{7}{10}\pi$, $\alpha = \frac{11}{10}\pi$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ y $\alpha = \frac{19\pi}{10}$.

CAPÍTULO

2

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales corresponde a la segunda unidad propuesta para la materia Álgebra y Geometría Analítica.

2.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

El problema modelo tiene como objetivo, primero, trabajar con ecuaciones lineales en contexto y, luego, introducir sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en la vida cotidiana.

2.1.1. Problema modelo

Parte 1: Ecuaciones lineales

¿Es posible modelizar las siguientes situaciones problemáticas mediante una ecuación lineal? Si es posible, escribir esa ecuación identificando el significado de la variable. Luego, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número sumado con su mitad y su tercera parte da como resultado 55? ¿Este número es entero?

b) ¿Qué número cumple con la condición de que la suma de tres números enteros consecutivos es igual al doble del menor más 1? ¿Qué ocurre si se pide que el número sea natural?

c) ¿Cuánto valen los lados de un rectángulo cuyo perímetro es de 35 cm?

Parte 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Laura compró un abrigo que estaba rebajado el 15 %. Irene eligió uno que era 250 pesos más caro que el de Laura, pero consiguió una rebaja del 20 %, por lo que solo pagó 80 pesos más que Laura. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema, identificando el significado de cada incógnita.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales y responder la pregunta.

c) Verificar que la solución sea la solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto.

Parte 3: Sistemas de ecuaciones lineales en la vida cotidiana

En la siguiente red se muestra el flujo del tránsito (en vehículos por hora) de varias calles de un solo sentido en el centro de una ciudad durante todo un día.

Una red consiste de un conjunto de puntos, llamados uniones o nodos, con líneas o arcos, llamadas ramas, que conectan algunos o todos los nodos.

La dirección del flujo se indica en cada arco y la cantidad (o tasa) de flujo se muestra por medio de una variable.

El supuesto básico del flujo de redes es que el flujo que entra en la red es igual al flujo que sale de la red, y que el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del nodo.

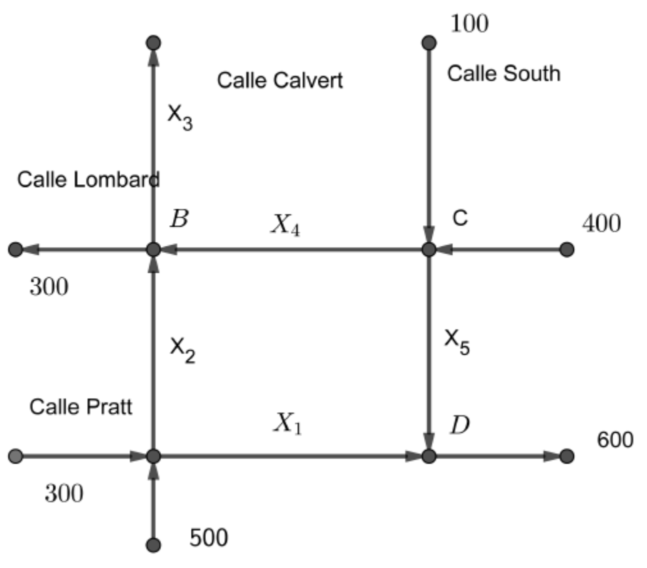


Figura 2.1

a) Describir el problema con un sistema de ecuaciones lineales, para determinar el patrón de flujo general de la red vial.

b) ¿(500, 300, 400, 400, 100) es un patrón de flujo del sistema?

c) Encontrar otro patrón de flujo para el sistema.

Resolución del problema modelo

Los problemas de la parte 1 se modelizan usando ecuaciones lineales.

En el ítem a), si x es el número buscado, debe cumplir que

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 55.$$

El valor de x que cumple con la ecuación lineal anterior es $x = 30$, que es un número entero.

Para el ítem b), la ecuación lineal que modeliza la pregunta es $x + x + 1 + x + 2 = 2x + 1$. Esta ecuación es equivalente (tiene la misma solución) que $3x + 3 = 2x + 2$. El número que cumple con esta ecuación es $x = -2$, que es un número entero. Observemos que esta ecuación no tiene solución en los números naturales. En efecto, no existe un $x \in \mathbb{N}$ solución de la ecuación ya que $3x+3 = (2x+2)+(x+1)$ es mayor que $2x + 2$.

En el ítem c) observemos que si el rectángulo tiene lados x e y, entonces el perímetro es $2x + 2y$. Así, tenemos infinitos valores de x e y que verifican que $2x + 2y = 35$. Como x e y corresponden a lados de un rectángulo, deben ser positivos, por lo cual $x > 0$ e $y = \frac{35}{2} - x > 0$, que equivale a $x < \frac{35}{2} = 17.5$. Así, concluimos que los rectángulos con lados x e y y cuyo perímetro es de 35 cm deben verificar que $0 < x < \frac{35}{2}$ y que $y = \frac{35}{2} - x$.

En la parte 2 se presenta un problema que se modeliza con un sistema de ecuaciones lineales. Este problema tiene la dificultad de que involucra el concepto de porcentaje, por lo cual es recomendable leerlo varias veces, para evitar cometer errores de interpretación.

Primero, tenemos que reconocer las incógnitas o variables del problema. En este caso, tomamos como incógnitas el precio del abrigo de Laura sin rebaja y el precio del abrigo de Irene sin rebaja. Llamaremos x a la primera e y a la segunda.

Reconocemos la primera ecuación lineal que aparece en la frase “Irene eligió uno que es 250 pesos más caro que el de Laura”. Con las letras que usamos para identificar las incógnitas, modelamos esta ecuación de la siguiente manera: $y = 250 + x$.

La segunda ecuación lineal aparece en las siguientes frases: “Laura compró un abrigo que estaba rebajado un 15 %” e “Irene consiguió una rebaja del 20 %, por lo que solo pagó 80 pesos más que Laura”. Para modelizar estos datos usando ecuaciones lineales, observemos que decir que Laura tuvo un descuento del 15 % significa que, luego del descuento, pagó $x - \frac{15}{100}x = \frac{85}{100}x$ por el abrigo. De la misma manera, decir que Irene tuvo un descuento del 20 % significa que luego del descuento pagó $y - \frac{20}{100}y = \frac{80}{100}y$. Así, decir que con estos descuentos Irene pagó 80 pesos más que Laura, quiere decir que lo que pagó Irene, que es $\frac{80}{100}y$, es igual a lo que pagó Laura, que es $\frac{85}{100}x$ más 80 pesos. Es decir, $\frac{80}{100}y = \frac{85}{100}x + 80$.

El problema, entonces, puede ser modelizado con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir, formamos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: el precio del abrigo de Laura x y del abrigo de Irene y, ambos sin descuento. El sistema lineal es el siguiente:

$$\begin{cases} y = 250 + x \\ \frac{80}{100}y = \frac{85}{100}x + 80 \end{cases} \tag{2.1}$$

Para resolver este sistema, recurrimos a algún método aprendido en la escuela secundaria, por ejemplo el método de igualación. Recordemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales significa encontrar su solución, es decir, x e y tales que satisfagan cada una de las ecuaciones lineales.

Observemos que es posible reescribir la segunda ecuación lineal del sistema como $y = \frac{100}{80}\left(\frac{85}{100}x + 80\right) = \frac{85}{80}x + 100$. Así, el sistema (2.1) nos queda

$$\begin{cases} y = 250 + x \\ y = \frac{85}{80}x + 100 \end{cases} \tag{2.2}$$

Igualando ambas ecuaciones del sistema (2.2), nos queda que $250 + x = \frac{85}{80}x + 100$, es decir que $250 - 100 = \frac{85}{80}x - x$, que es lo mismo que $150 = \frac{5}{80}x$. Por lo tanto, tenemos que $x = 150 \cdot \frac{80}{5}$, que es lo mismo que $x = 2.400$. Reemplazando este valor en cualquiera de las dos ecuaciones de (2.2), deducimos que $y = 250 + 2.400 = 2.650$. Esto significa que el abrigo de Laura sin rebaja cuesta 2.400 pesos y el de Irene cuesta 2.650 pesos. Por último, debemos verificar que $x = 2.400$ e $y = 2.650$ o, dicho de otro modo, $(2.400, 2.650)$ es solución del sistema (2.2). Se espera que los estudiantes verifiquen que, efectivamente, los valores encontrados cumplen con cada una de las ecuaciones lineales del sistema (2.2).

Para resolver la parte 3, primero, describimos las ecuaciones que representan el flujo de tránsito en cada calle e intentamos buscar la solución del problema, en otras palabras, el patrón de flujo de esta red vial. Para ello, etiquetamos las intersecciones de las calles (los nodos) y los flujos desconocidos en las líneas. Sabemos que en cada intersección, el flujo que entra es el mismo que el que sale. Así, en la intersección A el flujo entrante $300 + 500$ debe ser igual que el saliente, $x_1 + x_2$. En la intersección B, $x_2 + x_4$ tiene que ser igual que el flujo saliente $300 + x_3$. En la intersección C, tenemos que $100 + 400$, el flujo entrante debe ser igual a $x_4 + x_5$. Y por último, en la intersección D, el flujo entrante $x_1 + x_5$ debe ser igual a 600.

Además, el flujo total entrante debe ser igual al flujo total saliente de la red. Así, $500 + 300 + 100 + 400 = 600 + x_3 + 300$.

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema lineal de 5 ecuaciones lineales con 5 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 + x_4 = 300 + x_3 \\ 500 = x_4 + x_5 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ 1.300 = 900 + x_3. \end{cases}$$

Vemos que $x_3 = 400$. Por lo que tenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 + x_4 = 700 \\ 500 = x_4 + x_5 \\ x_1 + x_5 = 600. \end{cases} \tag{2.3}$$

Despejamos x_1 de la primera ecuación lineal y de la última:

$$x_1 = 800 - x_2, \qquad x_1 = 600 - x_5.$$

Igualamos ambas ecuaciones

$$800 - x_2 = 600 - x_5,$$

que, equivalentemente, es

$$x_5 = x_2 - 200.$$

Reemplazamos esta última ecuación en la tercera fila del sistema (2.3).

$$500 = x_4 + x_2 - 200,$$

o, equivalentemente,

$$x_4 = 700 - x_2.$$

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales, equivalente a todos los anteriores:

$$\begin{cases} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5. \end{cases} \tag{2.4}$$

Notemos que un flujo negativo en un arco de red corresponde al flujo que va en dirección opuesta al sentido mostrado en el modelo. Como en este problema el flujo va en un solo sentido, las variables no pueden ser negativas. Entonces, este sistema tiene restricciones $x_4 \geq 0$, por lo que $0 \leq x_5 \leq 500$. Así, este sistema de ecuaciones lineales tienen infinitas soluciones dadas por

$$(600 - x_5, 200 + x_5, 400, 500 - x_5, x_5),$$

donde $0 \leq x_5 \leq 500$.

2.1.2. Guía de problemas

Se ofrecen aquí algunas situaciones problemáticas que se pueden modelizar con un sistema de ecuaciones lineales. (Más adelante se trabajará con técnicas para encontrar soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.)

Ejercicio 2.1.1. *La edad de Pedro es el triple de la edad de Ana, pero dentro de 10 años su edad solo será el doble de la de Ana. ¿Cuáles son las edades de Pedro y Ana?*

a) Plantear un sistema de ecuaciones que modelice el problema e indicar el significado de cada incógnita.

b) Resolver el sistema de ecuaciones y responder la pregunta.

c) Verificar que la solución sea la solución del sistema de ecuaciones propuesto.

Ejercicio 2.1.2. *El perímetro de un rectángulo es 64 cm, y la diferencia entre las medidas de su base y su altura es de 6 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados del rectángulo?*

a) Modelizar el problema con un sistema de ecuaciones lineales e indicar el significado de cada incógnita.

b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado en el ítem anterior y responder la pregunta.

c) Verificar que la solución sea la solución del sistema de ecuaciones propuesto.

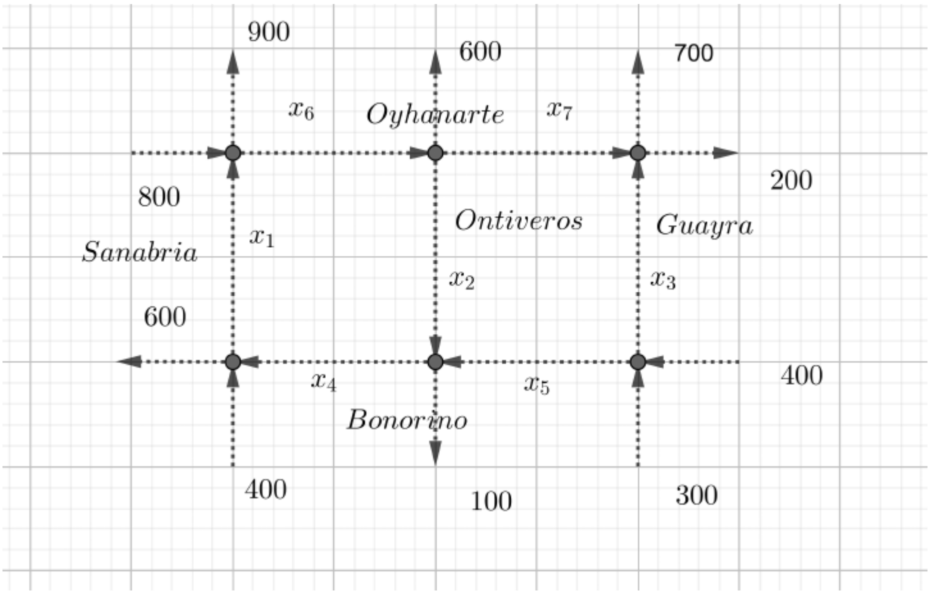
Ejercicio 2.1.3. *José le dice a Eva: "Mi colección de discos compactos es mayor que la tuya, pero si te cedo 10, tendríamos la misma cantidad". Eva le responde: "Reconozco que tenés razón. Solo te faltan 10 para doblar el número de los que yo tengo". ¿Cuántos discos compactos tiene cada uno?*

a) Modelizar el problema con un sistema de ecuaciones lineales e indicar el significado de cada incógnita.

b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado en el ítem anterior y responder la pregunta.

c) Verificar que la solución sea la solución del sistema de ecuaciones propuesto.

Ejercicio 2.1.4. *El mapa que aparece a continuación muestra algunas calles de una ciudad. El sentido de la circulación de cada calle está indicado por las flechas.*



El mapa indica el flujo de tránsito que entra o sale en cada calle, en unidades de vehículo por hora, y los números representan el flujo de tránsito promedio a la hora de mayor circulación. Algunas obras de reparación dificultarán la circulación en la calle Bonorino entre Ontiveros y Sanabria. ¿Es posible cortar completamente el tránsito allí y atender la demanda que planteará la circulación de vehículos en la *hora pico? Si no es posible, ¿qué medida conviene adoptar para minimizar el flujo de tránsito en esa calle?*

En cada intersección, el tránsito de entrada debe ser igual al de salida, no aparecen ni desaparecen misteriosamente autos en ninguna esquina, de modo que la circulación en cada cuadra debe satisfacer ecuaciones que reflejen esta propiedad.

a) Modelizar el problema con un sistema de ecuaciones e indicar, claramente, cuáles son las incógnitas del problema y qué significa cada ecuación lineal.

b) Dar un sistema de ecuaciones lineales equivalente al planteado en el ítem anterior, pero de manera que cada ecuación de dicho sistema aparezca en su mínima expresión.

c) Explicar cómo se puede responder a las preguntas del problema utilizando el sistema de ecuaciones.

2.1.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 2.1.2 llamamos x a la base del rectángulo e y a su altura; el perímetro es $2x + 2y$ y es igual a 64 cm. Por otro lado, la diferencia entra la base y la altura $x - y$ es igual a 6 cm.

Es decir,

$$\begin{cases} 2x + 2y = 64 \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Para resolver este sistema, despejamos x de la segunda ecuación lineal. Por lo tanto, tenemos que $x = 6 + y$. Luego, podemos reemplazar esta ecuación resultante en la primera ecuación del sistema:

$$2(6 + y) + 2y = 64.$$

De esta manera, tenemos que $y = 13$, y por lo tanto, $x = 19$. Verificar que $(19, 13)$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Por último, resolvemos el problema 2.1.4. El objetivo es intentar comprender cómo es la circulación de vehículos en esta situación vial. Para ello, debemos calcular cómo puede distribuirse el tránsito en las calles de esa ciudad de modo tal de satisfacer las demandas de los vehículos que entran y salen por cada calle. El supuesto básico del flujo de redes es que el flujo que entra en la red es igual al flujo que sale de la red, y que el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del nodo.

Con este supuesto, se puede arribar a un sistema de 6 ecuaciones lineales con 7 incógnitas. Tenemos una ecuación por cada nodo. Introducimos variables x_i que representan la cantidad de vehículos por hora que circulan por cada una de las cuadras en esta parte de la ciudad; es decir, las variables indican el flujo de tránsito entre determinadas calles. Así, x_1 indica el flujo de vehículos que circulan por hora en Sanabria, desde Bonorino a Oyhanarte, x_2 indica el flujo de vehículos que circulan por hora en Ontiveros, desde Oyhanarte hacia Bonorino, x_3 el flujo de vehículos que circula en Guayra, desde Bonorino hacia Oyhanarte, x_4 el número de vehículos que circula en Bonorino, desde Ontiveros hacia Sanabria, x_5 los vehículos que circulan por Bonorino desde Guayra hacia Ontiveros, x_6 los vehículos que circulan por Oyhanarte desde Sanabria hacia Ontiveros y x_7 los vehículos que circulan en Oyhanarte desde Ontiveros hacia Guayra.

En cada intersección, el tránsito de entrada es igual al de salida, no aparecen ni desaparecen autos en ninguna esquina, de modo que la circulación en cada cuadra debe cumplir ecuaciones que reflejen esta propiedad. En este sentido tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 400 + x_4 = 600 + x_1 \\ 800 + x_1 = 900 + x_6 \\ x_2 + x_5 = 100 + x_4 \\ 600 + x_7 + x_2 = x_6 \\ x_7 + x_3 = 700 + 200 \\ 300 + 400 = x_5 + x_3 \end{cases}$$

Luego, para contestar las preguntas es necesario interpretar qué significan las incógnitas del sistema y cómo se relacionan estas con las preguntas del problema.

En la pregunta “¿Es posible cortar la circulación en la calle Bonorino entre Ontiveros y Sanabria para atender la demanda que plantea la circulación de vehículos en la hora pico?”, se pide que $x_4 = 0$ y $x_1 \geq 0$. Mirando el sistema, se puede observar que no es posible responder esta pregunta. En efecto, si $x_4 = 0$, de la ecuación $400 + x_4 = 600 + x_1$ nos queda que $x_1 = -200$.

Pasemos a la siguiente pregunta: “¿Qué medida conviene adoptar para minimizar el tránsito por esa calle?”. En este punto se busca un mínimo x_4 tal que el valor de x_1 sea positivo.

Si $x_1 \geq 0$, tenemos de la ecuación $400 + x_4 = 600 + x_1$ que

$$400 + x_4 = 600 + x_1 \geq 600,$$

por lo que deducimos que $x_4 \geq 200$.

2.2. Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

El siguiente problema tiene como objetivo que, mediante la exploración con Geogebra, se dé una interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales y del tipo de soluciones que puede tener.

2.2.1. Problema modelo

Parte 1

1. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, resolver las consignas de abajo:

   a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$. c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - \frac{2}{3}y = \frac{4}{3} \end{cases}$.

   - Escribir en la entrada de la Vista algebraica cada una de las ecuaciones lineales del sistema. Mirar la Vista Gráfica y responder: ¿qué gráfico representa cada una de estas ecuaciones?
   - ¿Los gráficos se intersecan en algún punto? Si la respuesta es afirmativa, ¿en cuántos puntos lo hacen?
   - Si los gráficos se intersecan, indicar el o los puntos de intersección de los gráficos que representan las ecuaciones del sistema.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ dx + ey = 3 \end{cases}$$

   a) Crear deslizadores para los coeficientes a, b, c y d del sistema de ecuaciones lineales.

   b) Explorar lo realizado y resolver estas consignas:
      - Si el sistema tiene solución, ¿cuántas soluciones tiene? Gráficamente, ¿cuándo sucede esto?
      - Si el sistema tiene solución, ¿puede tener solo dos? ¿Por qué?
      - ¿El sistema puede no tener solución? Gráficamente, ¿cuándo puede suceder esto?

   c) Presentar conclusiones basadas en lo trabajado en los ítems anteriores.

Parte 2

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x - y = t \\ 10x - 2y = t \end{cases} \tag{2.5}$$

a) Determinar el valor de t para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución.

b) Determinar el valor de t para que el sistema de ecuaciones lineales no tenga solución.

Resolución del problema modelo

Resolvemos aquí el ejercicio 1) de la parte 1. Graficamos las rectas que representan las ecuaciones lineales del sistema del ítem a) usando Geogebra.

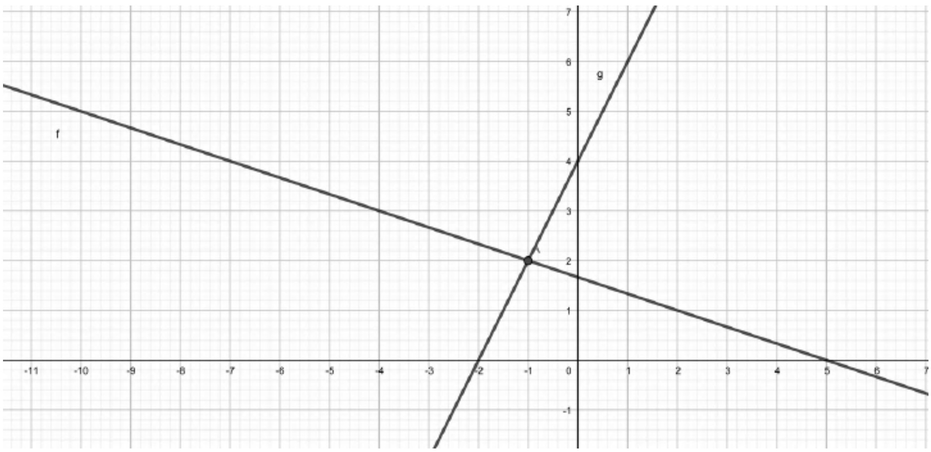


Figura 2.2

En el gráfico se observa que las rectas se cruzan en un único punto: $A = (-1, 2)$, que es la solución del sistema de a). Verificar esta solución.

En el ítem b), las rectas son paralelas y, por lo tanto, no hay un punto de intersección. A continuación graficamos las rectas que representan este sistema de ecuaciones lineales:

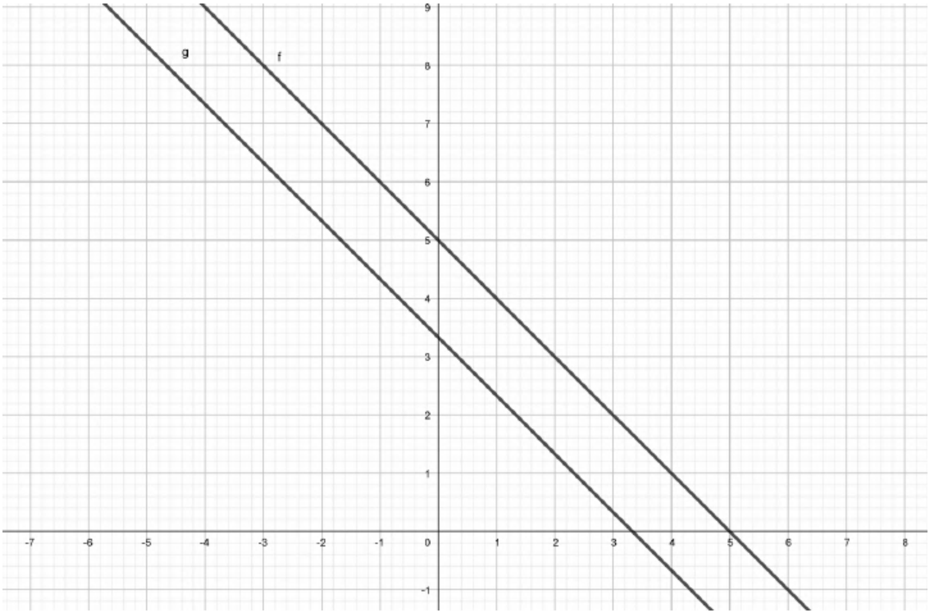


Figura 2.3

Observando el gráfico, es posible concluir que el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, ya que las rectas que representan cada ecuación lineal del sistema son paralelas. Es tarea de los estudiantes justificarlo analíticamente.

Por último, en el ítem c), las rectas del sistema de ecuaciones lineales coinciden, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

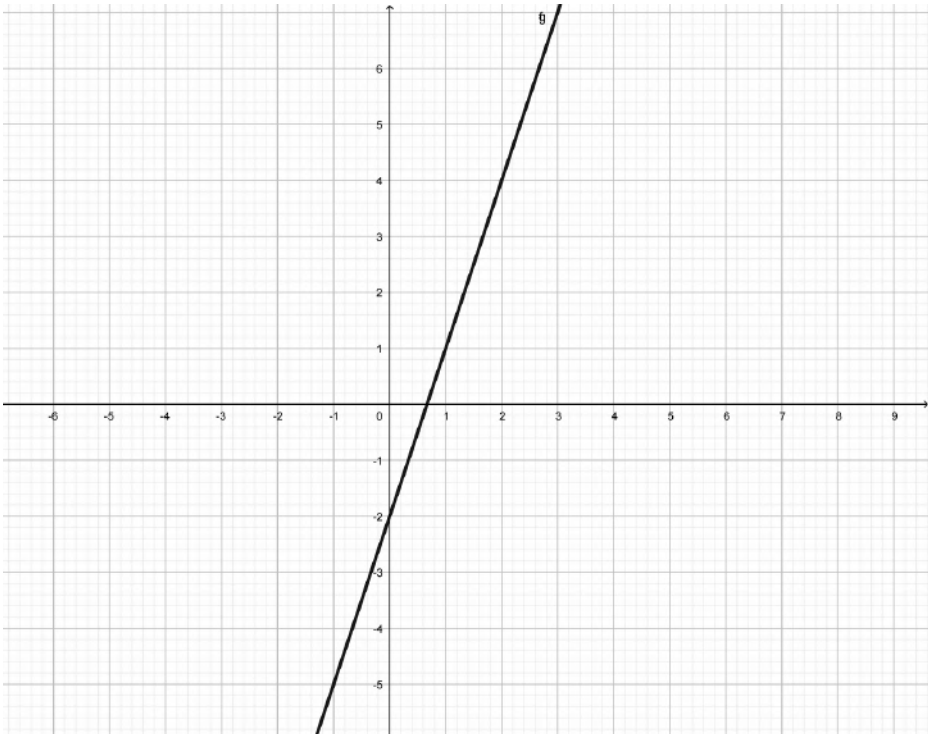


Figura 2.4

Las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales corresponden a todos los puntos de la recta. Más precisamente, las soluciones del sistema c) son los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $y = 3x - 2$, con $x \in \mathbb{R}$.

Resolver el ejercicio 2 usando Geogebra, intentando llegar a las conclusiones que se exponen a continuación.

Conclusiones

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, infinitas soluciones o ninguna. Si un sistema tiene una única solución, las rectas lineales que representan se intersecan en un solo punto. Este tipo de sistema se llama sistema compatible determinado. *Si un sistema tiene infinitas soluciones, las rectas coinciden. Este tipo de sistema se llama* compatible indeterminado. *Por último, un sistema puede no tener solución, que es el caso en que las rectas son paralelas. Este tipo de sistema se llama* incompatible.

Por último, hay dos maneras de resolver la parte 2 del problema modelo. Una es de manera geométrica. Si observamos que cada ecuación lineal con dos incógnitas representa geométricamente una recta en el plano, podemos escribir cada ecuación lineal del sistema (2.5) de la siguiente manera: la primera, $y = 5x - t$, y la segunda, $y = 5x - t/2$. Como la pendiente de las dos rectas es la misma, lo que puede ocurrir es que o sean paralelas o sean coincidentes. Es decir, si $t \neq t/2$, entonces las dos rectas son paralelas. En este caso, las dos rectas no se intersecan en ningún punto del plano, por lo que interpretamos que el sistema lineal que representan estas dos rectas (ecuaciones lineales) no tiene solución. Así, si $t \neq 0$, el sistema de ecuaciones lineales (2.5) es incompatible, es decir que no tiene solución. Otra posibilidad es que las dos rectas sean coincidentes. Este es el caso en que $t = 0$. Así, todos los puntos de la recta (que son infinitos) son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales que definen estas dos rectas. De esta manera, si $t = 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales (2.5) es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Otro modo de resolver el problema es analíticamente, es decir, interpretando las cuentas que hacemos. Igualamos las dos ecuaciones lineales del sistema de ecuaciones lineales del ejercicio: $5x - y = 10x - 2y$, así deducimos que $y = 5x$. Pero, ¿qué quiere decir esto? Reemplazando esta ecuación en cada una de las ecuaciones lineales del sistema (2.5) tenemos que $t = 0$. Esta cuenta nos indica que si $t = 0$, el sistema de ecuaciones lineales estudiado tiene infinitas soluciones y estas representan la recta $y = 5x$ con $x \in \mathbb{R}$, lo que es lo mismo, las soluciones son $(x, 5x)$ con $x \in \mathbb{R}$. En cambio si $t \neq 0$, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

2.2.2. Guía de problemas

Ejercicio 2.2.1. *Sean los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

a)
$$\begin{cases} x + 7y = 4 \\ -2x - 9y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -3x + 9y = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -9x + 15y = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Contestar las siguientes preguntas, para cada uno de los sistemas anteriores:

- *¿Tiene solución?*
- *Si tiene solución, escribir todas las soluciones del sistema.*
- *Si no tiene solución, dar una justificación de por qué no la tiene.*

Ejercicio 2.2.2. *Dado el sistema lineal*

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = t \end{cases}$$

a) Determinar un valor de t para que el sistema tenga una solución.

b) Determinar un valor de t para que el sistema no tenga solución.

c) ¿Cuántos valores de t pueden seleccionarse en el ítem b?.

2.3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: el método de eliminación gaussiana

El siguiente problema modelo permite trabajar con un método algorítmico de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Este método permite, por medio de operaciones elementales, pasar de un sistema de ecuaciones lineales a otro sistema equivalente escalonado, en el que cada ecuación lineal tiene menos incógnitas que la anterior.

2.3.1. Problema modelo

1. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -5 \\ 3y + z = 7 \\ z = 4 \end{cases}$$

2. ¿Es posible, a partir del sistema de ecuaciones lineales, escribir otro sistema equivalente, pero escalonado?

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

3. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ -x + 3y + z = 1, \end{cases}$$

se puede escribir de manera matricial como

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & |2 \\ 3 & -2 & 5 & |6 \\ -1 & 3 & 1 & |1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se llama matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

- Determinar las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas.

  a) Intercambiar la segunda y la tercera fila. Escribir la nueva matriz M_1.
  b) Multiplicar la segunda fila de M_1 por 2. Escribir la nueva matriz M_2.
  c) Sumar la primera fila y la segunda fila de M_2 y reemplazarla en la segunda fila. Escribir la nueva matriz M_3.
  d) Multiplicar la primera fila de la matriz M_3 por 3 y la tercera fila por 2. Escribir la nueva matriz M_4.
  e) Restar la primera fila y la tercera fila y reemplazarla en la fila 3. Escribir la nueva matriz M_5.
  f) ¿Qué otras operaciones hay que hacer para transformar la matriz M_5 en una nueva matriz escalonada, es decir que cada fila tenga más ceros que en la anterior?

- Reescribir la matriz escalonada hallada como un sistema de ecuaciones lineales y encontrar la solución del sistema. ¿Esta solución es solución también del sistema de ecuaciones lineales original?

4. Resolver las consignas de más abajo para el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

a) Escribir el sistema de ecuaciones lineales en lenguaje matricial indicando la matriz ampliada.
b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación gaussiana.
c) Indicar qué tipo de sistema es según su cantidad de soluciones.

Resolución del problema modelo

En el ítem 1) del problema modelo hay que encontrar la solución del sistema. Podemos ir hacia atrás y sustituir en la ecuación 2 del sistema, $3y + z = 7$, el valor $z = 4$. De ahí obtenemos que $y = 1$. Por último sustituimos estos dos valores hallados en la ecuación 1 del sistema, $2x + y - 2z = -5$, y encontrar el valor de x. Por lo tanto, la solución del sistema es $(1, 1, 4)$.

En el ítem 2) debemos encontrar sistemas equivalentes al dado. Una posibilidad es multiplicar toda la segunda ecuación por 2 y reemplazarla en la ecuación 2. De esta manera, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Otro sistema equivalente, que resulta escalonado, se obtiene al restar la primera ecuación y la segunda ecuación, y reemplazar la ecuación resultante en la segunda ecuación.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y = -1 \end{cases}$$

Este último sistema es equivalente a los dos anteriores, es decir todos los sistemas tienen la misma cantidad de soluciones. La ventaja de este último sistema es que, a partir de éste podemos encontrar más fácilmente la solución, que es $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En el ítem 3) debemos encontrar matrices equivalentes a la matriz M. En el ítem a) debemos intercambiar la segunda y la tercera fila. La nueva matriz es:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & |2 \\ -1 & 3 & 1 & |1 \\ 3 & -2 & 5 & |6 \end{pmatrix}$$

En el ítem b) debemos multiplicar la segunda fila de M_1 por 2. Así, la nueva matriz es:

$$M_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & |2 \\ -2 & 6 & 2 & |2 \\ 3 & -2 & 5 & |6 \end{pmatrix}$$

En el ítem c) debemos sumar la fila 1 y la fila 2 de M_2, y reemplazarla en la fila 2. La nueva matriz es:

$$M_3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & |2 \\ 0 & 6 & 6 & |4 \\ 3 & -2 & 5 & |6 \end{pmatrix}$$

En el ítem d) debemos multiplicar la fila 3 por 2 y la primera fila por 3. La nueva matriz es:

$$M_4 := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 & |6 \\ 0 & 6 & 6 & |4 \\ 6 & -4 & 10 & |12 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cálculo del ítem e):

$$M_5 := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 & |6 \\ 0 & 6 & 6 & |4 \\ 0 & 4 & 2 & |-6 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, podemos multiplicar la segunda fila de M_5 por 2, y la fila 3 por 3, y vamos a obtener la siguiente matriz:

$$M_6 := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 & |6 \\ 0 & 12 & 12 & |8 \\ 0 & 12 & 6 & |-18 \end{pmatrix}$$

Luego, restamos las filas 2 y 3 de M_6 y la reemplazamos en la fila 3. Obtenemos así la siguiente matriz escalonada:

$$M_7 := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 & |6 \\ 0 & 12 & 12 & |8 \\ 0 & 0 & 6 & |26 \end{pmatrix}$$

Reescribimos la información de esta matriz en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 6x + 12z = 6 \\ 12y + 12z = 8 \\ 6z = 26 \end{cases}$$

A partir de aquí es fácil deducir que la solución del sistema es $(\frac{-23}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{13}{3})$.

Por último, en el ítem 4) del problema modelo queremos resolver

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema consta de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. Es posible escribir la información de los coeficientes de cada una de las ecuaciones lineales en una matriz A de tamaño 4×4. Más precisamente, esta matriz es

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, escribimos los términos independientes del sistema en una matriz

$$B := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de tamaño 4×1. Así, si escribimos las incógnitas también en una matriz

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

reescribimos el sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$A \cdot X = B.$$

Llamamos representación matricial aumentada o matriz aumentada $(A|B)$ a la matriz que tiene la información de los coeficientes A y de los términos independientes B. En el caso de este ejercicio, la matriz aumentada tiene 4 filas, que llamaremos F_i con $i = 1, 2, 3, 4$, y tiene 5 columnas.

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

El método de eliminación gaussiana permite, usando operaciones elementales, transformar $(A|B)$ en otra matriz escalonada equivalente por filas.

Comenzamos intercambiando la fila 1 por la fila 2:

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Tomamos la fila F_1, la primera fila de $(A|B)$, e identificamos el primer elemento no nulo contando de izquierda a derecha, llamado pivote. En este caso, el pivote es 2. Nuestro objetivo es eliminar la columna pivote, es decir, todos los elementos de la primera columna que están por debajo del pivote. Para ello, vamos a usar las operaciones elementales descriptas anteriormente. En este caso, realizamos las siguientes operaciones elementales:

- A la fila 1 le restamos 2 veces la fila 3 y la reemplazamos en la fila 3 ($F_1 - 2F_3 \to F_3$).
- Tres veces la fila 1 menos dos veces la fila 4 y la reemplazamos en la fila 4 ($3F_1 - 2F_4 \to F_4$).

Así, obtenemos

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -7 & -3 \\ 0 & 13 & -3 & -27 & -11 \end{array}\right).$$

Eligiendo de la segunda fila al pivote 1, queremos eliminar todos los elementos no nulos de la segunda columna pivote. Para ello vamos a usar las siguientes operaciones elementales:

- Tres veces la fila 2 menos la fila 3 y la reemplazamos en la fila 3 ($3F_2 - F_3 \to F_3$).
- Trece veces la fila 2 y le restamos la fila 4, esa cuenta la reemplazamos en la fila 4 ($13F_2 - F_4 \to F_4$).

Así, obtenemos

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 29 & -38 & 50 \end{array}\right).$$

Finalmente, elegimos como pivote el número 7 de la fila 3. Así, usando la siguiente operación elemental

$$7F_4 - 29F_3 \to F_4,$$

obtenemos la siguiente matriz ampliada equivalente:

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -34 & 2 \end{array}\right).$$

A continuación, transformamos la matriz ampliada $(A|B)$ en el siguiente sistema de ecuaciones lineales equivalente al sistema dado:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -3 \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_3 - 8x_4 = 12 \\ -34x_4 = 2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, tenemos que $x_4 = \frac{-1}{17}$, $x_3 = \frac{28}{17}$, $x_2 = \frac{-10}{17}$ y $x_1 = \frac{9}{17}$. Concluimos así que el sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución: $(\frac{9}{17}, \frac{-10}{17}, \frac{28}{17}, \frac{-1}{17})$.

2.3.2. Guía de problemas

En esta sección, se presentan ejercicios para trabajar con el método de eliminación gaussiana.

Ejercicio 2.3.1. *Dado el siguiente sistema lineal, resolver las consignas que le siguen abajo:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

a) Verificar que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ y $z_1 = -1$ es una solución.

b) ¿Por qué $x_2 = -2$, $y_2 = -3$ y $z_2 = -5$ no es solución de sistema?

Ejercicio 2.3.2. *¿Existe un valor de r tal que* $x = 1$, $y = 2$ *y* $z = r$ *sea una solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales? De ser así, encontrar dicho valor.*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x - y + 2z = -7 \\ 4x + y - 2z = 12 \end{cases}$$

Ejercicio 2.3.3. $(1, -5)$, $(-1, 1)$ *y* $(2, 7)$ *son puntos de la parábola que representa la función cuadrática* $p(x) = ax^2 + bx + c$.

1) *Determinar un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas que deba resolverse para determinar el valor de a, b y c.*
2) *Resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtuvo en el ítem* 1) *para a, b y c usando el método de eliminación.*

Ejercicio 2.3.4. *a) Enunciar las operaciones elementales de filas que deberán realizarse en el sistema para encontrar sus soluciones.*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 5x_3 - x_4 = 7 \\ x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$$

b) La matriz aumentada de un sistema lineal se ha transformado mediante operaciones de filas, en la forma que aparece a continuación. Determinar el sistema de ecuaciones lineales asociado e indicar su solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & |2 \\ 0 & -2 & 5 & |6 \\ 0 & 0 & 5 & |1 \end{pmatrix}$$

c) ¿Es (3,4,-2) solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

d) ¿Para cuáles valores de a y b es compatible el siguiente sistema?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = a \\ -6x_1 + 3x_2 = b \end{cases}$$

Los siguientes problemas se resuelven utilizando Geogebra u Octave.

Ejercicio 2.3.5. *Una compañía petrolera dispone de tres refinerías de petróleo: Refinería 1, Refinería 2 y Refinería 3. Cada una produce tres productos basados en el crudo: alquitrán, gasóleo y gasolina. Con un barril de petróleo, la primera refinería produce* 4 *litros de alquitrán,* 2 *de gasóleo y* 1 *de gasolina; la segunda refinería produce* 2 *litros de alquitrán,* 5 *de gasóleo y* 2.5 *de gasolina, y la tercera refinería produce* 1 *litro de alquitrán,* 2 *de gasóleo y* 5 *de gasolina.*

La compañía necesita entregar 600 *litros de alquitrán,* 800 *litros de gasóleo y* 1000 *litros de gasolina. ¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda? Resolver el problema usando Octave.*

Ejercicio 2.3.6. *Resolver el siguiente problema usando Octave. Un móvil A sale de un punto a una velocidad de* $60km/h$ *y luego de* 30 *minutos parte otro móvil B del mismo punto a una velocidad de* $80km/h$ *¿Cuándo alcanzará el segundo móvil al primero y a qué distancia del punto de partida lo hará?.*

Ejercicio 2.3.7. *Indicar de manera analítica y gráfica, explorando con Octave o Geogebra, si cada uno de los siguientes sistemas tiene solución o no.*

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

2.3.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

Para resolver el ejercicio 2.3.2 buscamos un valor de r para que $(1, 2, r)$ sea una solución del sistema. Para ello, debe ser solución de cada una de las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, debe cumplirse que $2 + 6 - r = 11$, que $1 - 2 + 2r = -7$ y, finalmente, que $4 + 2 - 2r = 12$. De estas ecuaciones deducimos que $r = -3$. Por lo tanto, la solución es $(1, 2, -3)$.

En la resolución del ejercicio 2.3.3 se aplican temas vistos en Análisis, y permite repasar el método de eliminación gaussiana. El ejercicio dice que por los puntos $(1,-5)$, $(-1,1)$ y $(2,7)$ pasa el gráfico de una cuadrática y pide encontrar esa función. Para hacerlo, escribimos el formato de una función cuadrática genérica: $f(x) = ax^2 + bx + c$. El objetivo es encontrar a, b y c para que se cumpla: $f(1) = -5$, $f(-1) = 1$ y $f(2) = 7$. Esta información se puede escribir en un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, y deberíamos encontrar la única solución al sistema, que corresponde a encontrar los valores de los parámetros de la cuadrática.

El sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{cases} a + b + c = -5 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 7. \end{cases}$$

A continuación, escribimos la matriz ampliada asociada a dicho sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Elegimos como pivote el 1 de la F_1, fila 1 e intentamos eliminar los números de la columna 1 que están por debajo de ese pivote. Para ello, realizamos las siguientes operaciones elementales:

- $F_1 - F_2 \to F_2$, es decir, a la fila 1 le resto la fila 2 y esa cuenta la escribo en la fila 2.
- $4F_1 - F_3 \to F_3$, es decir cuatro veces la fila 1 menos la fila 3 y esa cuenta la reemplazo en la fila 3.

Así tenemos la siguiente matriz ampliada equivalente:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -27 \end{array}\right).$$

Ahora, tomando como pivote al número 2 de la segunda fila y haciendo la operación elemental $F_2 - F_3 \to F_3$, tenemos la siguiente matriz ampliada escalonada equivalente:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 21 \end{array}\right).$$

Por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales escalonado equivalente al planteado al principio:

$$\begin{cases} a+b+c=-5 \\ 2b=-6 \\ -3c=21. \end{cases}$$

Así, tenemos que $c = -7$, $b = -3$ y $a = 5$, por lo que el sistema es compatible determinado y la única solución es $(5,-3,-7)$. Con estos cálculos podemos decir que la función cuadrática que cumple con los datos dados en el problema es

$$f(x) = 5x^2 - 3x - 7.$$

El enunciado del ejercicio 2.3.5 se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 600 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 800 \\ x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 = 1000 \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales con Geogebra, necesitamos la Vista Cas (lenguaje simbólico y algebraico) y usar el comando SolucionesC[lista de ecuaciones, lista de variables].

```
SolucionesC({2*x_{1}+5*x_{2}+2*x_{3}=800,
4*x_{1}+2*x_{2}+x_{3}=600,
x_{1}+2.5*x_{2}+5*x_{3}=1000}, {x_{1}, x_{2}, x_{3}})
(625/8, 275/4, 150)
```

Esto nos indica que, para satisfacer la demanda planteada, la Refinería 1 necesita 78.125 barriles de crudo, la Refinería 2 necesita 68.75 barriles de crudo y la Refinería 3 necesita 150 barriles de crudo.

Resolvemos ahora el ejercicio 2.3.6. Planteamos las ecuaciones de cada móvil:

$$v_A(t - t_{0A}) = x_A,$$

$$v_B(t - t_{0B}) = x_B$$

El subíndice indica a qué móvil nos referimos. Estas ecuaciones muestran dónde estarán los móviles A y B luego de un determinado tiempo t. Primero, reescribimos las ecuaciones para poner el problema de manera matricial. Para ello, observamos que $x_A = x_B = x$.

Así, tenemos que

$$v_A t - x = v_A t_{0A},$$

$$v_B t - x = v_B t_{0B}.$$

De manera matricial:

$$\begin{pmatrix} v_A & -1 \\ v_B & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A t_{0A} \\ v_B t_{0B} \end{pmatrix}.$$

Es tarea de los estudiantes verificar que los móviles se encuentran 2 horas después de partir de A (t=2) y lo hacen a 120 kilómetros del punto de partida (x = 120).

Resolvamos ahora algunos ítems del ejercicio 2.3.7. Para el ítem a) vemos, usando la Vista Cas, que el sistema no tiene solución. También observamos que aparece el conjunto vacío:

```
SolucionesC({2*x_{1}+x_{2}=3,2*x_{1}-x_{2}
            =0,x_{1}-2*x_{2}=4},{x_{1},x_{2}})
{}
```

Usando la vista algebraica y gráfica de Geogebra, vemos que cada una de las ecuaciones lineales del sistema representa una recta. Así, para que tenga solución, las tres rectas deberían intersecarse a la vez pero esto no sucede, por lo que el sistema no tiene solución.

Poniendo todos los datos en Geogebra, tenemos que las tres rectas que representan el sistema de ecuaciones lineales no se cortan simultáneamente en ningún punto.

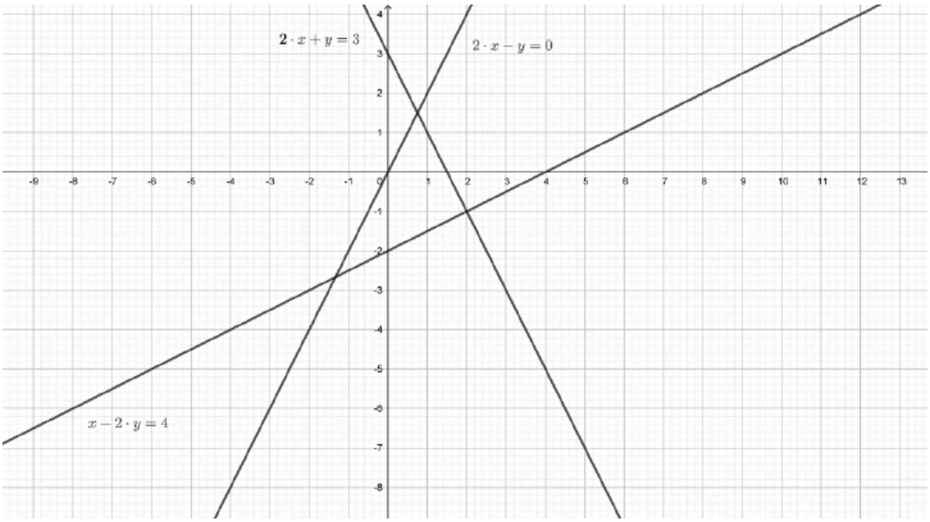


Figura 2.5

En el sistema del ítem b) vemos, usando la Vista Cas de Geogebra, que tiene infinitas soluciones:

```
SolucionesC({2*x_{1}+x_{2}=3,2*x_{1}-x_{2}
            =0,x_{1}-2*x_{2}=4},{x_{1},x_{2}})
(-1/2*x_2+3/2, x_2)
```

Gráficamente, se observa que las tres ecuaciones representan la misma recta, por lo que existen infinitos puntos que son solución de cada una de las mismas ecuaciones lineales.

Por último, para el ítem c) observamos con Geogebra que el sistema tiene única solución y es $(2, -1)$.

```
SolucionesC({2*x_1+x_2=3, 2*x_1-x_2
           =5, x_1-2*x_2=4}, {x_1, x_2})
(2,-1)
```

Gráficamente vemos que las tres rectas que representan las tres ecuaciones del sistema se intersecan en un punto.

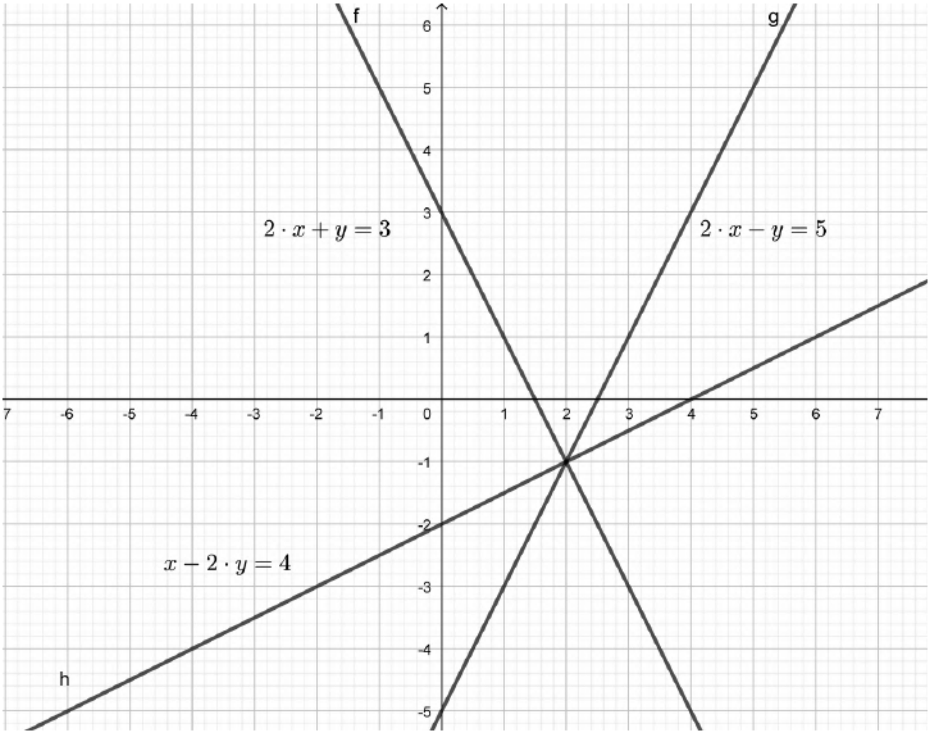


Figura 2.6

Por último, para el ítem d), usando la Vista Cas de Geogebra, vemos que el sistema tiene infinitas soluciones.

```
SolucionesC({x_{1}+x_{2}+x_{3}=6,x_{1}-2*x_{3}
           =4, 2*x_{1}+x_{2}-x_{3}
           =10},{x_{1},x_{2},x_{3}})
(2 x_{3} +4, -3 x_{3}+2, x_{3})
```

Con Geogebra, observamos que cada una de las ecuaciones del sistema representa un plano (más adelante veremos este concepto). Para representar estos planos, usamos la opción Gráficos en 3D. Es tarea de los estudiantes realizar este gráfico y observar que los planos que representan cada una de las ecuaciones lineales se intersecan en una recta.

2.4. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales según sus soluciones

Los ejercicios propuestos en este problema modelo permiten observar los posibles tipos de soluciones para un sistema de ecuaciones lineales dado, por medio de la exploración y argumentación. Más adelante, veremos un concepto que permite determinar si un sistema cuadrado (la misma cantidad de ecuaciones lineales que incógnitas) tiene solución o no, sin necesidad de triangular la matriz ampliada asociada al sistema.

2.4.1. Problema modelo

1. ¿Es posible determinar qué tipo de solución tiene los siguientes sistemas de ecuaciones lineales? Si la respuesta es afirmativa, indicar si tiene infinitas soluciones, una única solución o ninguna.

a)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para el siguiente sistema de ecuaciones lineales?
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$
   a) El sistema tiene solución única.
   b) El sistema tiene infinitas soluciones.
   c) El sistema no tiene solución.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + kz = 5 \end{cases}$$
   a) Hallar k para el sistema sea incompatible.
   b) Hallar k para que el sistema sea compatible y $z = 1$.
   c) Para el valor hallado en el ítem anterior resolver el sistema.

Resolución del problema modelo

Para resolver el punto 1 del problema modelo, escribimos las formas ampliadas asociadas a cada sistema de ecuaciones y, mediante las operaciones elementales permitidas, buscamos llegar a las siguientes matrices ampliadas equivalentes escalonadas.

Para el ítem a) de ese punto, la matriz equivalente para el primer sistema de ecuaciones lineales es:

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -8 & |8 \\ 0 & 0 & 2 & |6 \end{pmatrix}$$

La matriz equivalente para el segundo sistema es:

$$S_2 := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & |2 \\ 0 & -2 & 12 & |6 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

La matriz equivalente para el tercer sistema es:

$$S_3 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |1 \\ 0 & -1 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |5 \end{pmatrix}$$

Observemos que S_1 es una matriz escalonada, por lo que si traducimos esta información en un sistema de ecuaciones lineales, el sistema tiene solución única. Más precisamente, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -2x_3 = 6 \end{cases}$$

Así, haciendo sustituciones hacia atrás, podemos encontrar la única solución del sistema.

Por otro lado, como en S_2 una fila es solo de ceros, un sistema equivalente a b) es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que el sistema es compatible pero indeterminado, tiene infinitas soluciones. Más precisamente, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 4x_2 = 2 \\ -2x_2 + 12x_3 = 6 \end{cases}$$

Asi, el sistema de ecuaciones lineales tiene dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que deducimos que tiene infinitas soluciones.

Por último, como en S_3 la última fila tiene todos ceros excepto el último elemento, que es 5, concluimos que el sistema asociado a la matriz no tiene solución única, ya que $0 = 5$ es un absurdo.

En el punto 2, observamos que el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo (los términos independientes son 0). Por lo tanto, siempre tiene una solución y corresponde a $(0, 0, 0)$. Por otro lado, se puede observar que la segunda ecuación es dos veces la primera, y la tercera ecuación es tres veces la primera, por lo que el sistema de ecuaciones lineales dado es equivalente a la ecuación $x+y+z = 0$. En este punto, el sistema tiene infinitas soluciones, todas correspondientes a los valores (x, y, z) que cumplen $x + y + z = 0$.

Por último, resolvemos el punto 3. Nuevamente, para hallar la solución de este ejercicio pasamos el sistema de ecuaciones lineales a la siguiente matriz ampliada asociada:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k & 5 \end{array}\right).$$

Se espera que los estudiantes comprueben que a partir de determinadas operaciones elementales, se obtiene la siguiente matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 7 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & k & -2 \end{array}\right).$$

Así, si $k = 0$, el sistema no tiene solución.

Por otro lado, si reemplazamos $z = 1$ en el sistema dado, tenemos que:

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -2 \\ 3x - y = 5 - k \end{cases}$$

Buscamos los valores de k para que este sistema tenga solución, o bien una única o bien infinitas. Pasamos este sistema a la matriz ampliada equivalente:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 5-k \end{array}\right).$$

Mediante determinadas operaciones elementales por filas, tenemos la siguiente matriz ampliada equivalente:

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & -2-k \end{array}\right).$$

Observando esta última matriz, vemos que o bien es un sistema con única solución (para $k=-2$) o bien no tiene soluciones (para $k \neq -2$). Entonces, para que el sistema sea compatible, tenemos que pedir que $k = -2$. Por último, debemos resolver el sistema para $k=-2$, por lo que tenemos

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 7y = 20. \end{cases}$$

Así, $y = \frac{20}{7}$ y, por lo tanto, $x = \frac{23}{7}$. Entonces, la solución del sistema es $(\frac{23}{7}, \frac{20}{7})$.

2.4.2. Guía de problemas

Esta sección incluye ejercicios sobre los tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 2.4.1. *Resolver las consignas para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

1)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -3 \\ 2x_1x_2 - x_3 + 3x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -5 \end{cases}$$

a) Escribir el sistema de ecuaciones lineales utilizando la matriz ampliada asociada.

b) *Utilizar el método de eliminación de Gauss para escribir la matriz ampliada equivalente escalonada por filas.*

c) *Observando la matriz asociada escalonada por filas hallada en el ítem b, indicar si el sistema de ecuaciones es compatible o incompatible. Si es compatible, indicar si es determinado o indeterminado.*

d) *Escribir el sistema de ecuaciones lineales equivalente al sistema original, asociada a la matriz ampliada escalonada por filas que se encontraron en el ítem b.*

e) *Enconrtar la solución o soluciones del sistema si las tuviese.*

Ejercicio 2.4.2. *a)* *Determinar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos tienen solución no trivial.*

1)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_1 + 8x_3 + 3x_4 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

b) *A partir de los ejemplos anteriores, determinar cuándo un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene más de una solución.*

Ejercicio 2.4.3. *¿Para qué valores de k el sistema no tiene solución?*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (k^2 - 5)x_3 = k \end{cases}$$

Buscar un valor de k para el cual el sistema tenga solución única y encontrar su solución para ese valor.

Ejercicio 2.4.4. *Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificar las respuestas:*

a) *Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas siempre tiene solución.*

b) *Un sistema de 4 ecuaciones lineales con 3 incógnitas siempre tiene solución.*

c) *Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas tiene o bien una única solución o no tiene solución.*

d) Un sistema homogéneo de 4 ecuaciones lineales con 3 incógnitas siempre tiene solución.

e) Un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas siempre tiene una única solución.

2.4.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 2.4.4, la afirmación a) es falsa. Para ello, tenemos que dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas que no tenga solución, lo que se llama un contraejemplo. En el siguiente ejemplo, el sistema no tiene solución:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x+y=1 \\ z+w=1 \end{cases}$$

La afirmación b) también es falsa. Damos para ello el siguiente ejemplo, que es un sistema lineal que no tiene solución:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=2 \\ x+y=0 \\ z=2. \end{cases}$$

La afirmación c) también es falsa. Los estudiantes deben ver que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x+y=0 \\ z+w=1. \end{cases}$$

La afirmación d) es verdadera, ya que un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial, es decir la solución $(0,0,0)$.

La afirmación e) es falsa. Es tarea de los estudiantes verificar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ -x-y-z-w=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

2.5. Ejercicios varios

Estos ejercicios relacionan todos los contenidos referidos a sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 2.5.1. *Un aspecto importante del estudio de la transferencia de calor es determinar la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conocen las temperaturas alrededor de la placa. Supongamos que la placa de la siguiente figura representa una sección transversal perpendicular a la placa.*

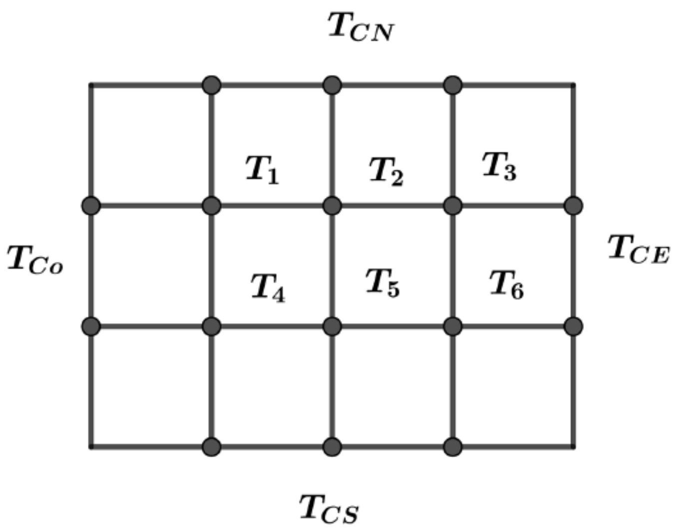


Figura 2.7

Sean T_i *con* $1 \leq i \leq 6$ *las temperaturas interiores de los nodos de la red.*

Cierta experimentación arroja el siguiente resultado: 'la temperatura en un nodo es, aproximadamente, igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha, y a la izquierda. Así, por ejemplo,

$$T_1 = \frac{(T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_0})}{4}.$$

Determinar la temperatura interior T_2*, sabiendo que* $T_{C_N} = 25$, $T_{C_E} = 37$, $T_{C_S} = 10$ *y* $T_{C_0} = 31$*, medidos en grados.*

Ejercicio 2.5.2. *Tres compuestos se combinan para formar tres tipos de fertilizantes. Una unidad del fertilizante de tipo I requiere 10 kg del compuesto A, 30 kg del compuesto*

B y 60 kg del compuesto C. Una unidad del tipo II requiere 20 kg del A, 30 kg del B, 50 kg del C. Una unidad del tipo III requiere 50 kg del A y 50 kg del C. Si hay disponibles 1.600 kg del A, 1.200 kg del B y 3.200 kg del C, ¿cuántas unidades de los tres tipos de fertilizantes se pueden producir usando todo el material químico disponible?

a) Modelizar el problema con un sistema de ecuaciones e indicar el significado de cada variable y el significado de cada ecuación del sistema.

b) ¿Es (20,20,20) solución del sistema de ecuaciones lineales? Justificar la respuesta.

c) Resolver el sistema de ecuaciones lineales para encontrar sus soluciones.

Ejercicio 2.5.3. *Un deportista de alto rendimiento debe cumplir con una dieta específica hipercalórica. Su nutricionista le indica ingerir 3.000 calorías diarias, en las que incluye 60 gramos de proteínas, 1.000 miligramos de calcio y 10 miligramos de hierro. Este plan alimentario restringe la dieta a los seis alimentos incluidos en la tabla de abajo que contienen, cada 100 gramos de cada alimento, las cantidades de nutrientes que se muestran en las columnas de proteínas, calcio y hierro:*

Alimento	*Calorías*	*Proteínas (g)*	*Calcio (mg)*	*Hierro (mg)*
Carne Vacuna	*250*	*18*	*10*	*2.5*
Garbanzos	*360*	*20*	*130*	*8*
Lechuga	*16*	*1,3*	*30*	*0,8*
Huevos	*160*	*12*	*60*	*3*
Mayonesa	*718*	*1,1*	*18*	*0,5*
Leche	*65*	*3,3*	*120*	*0,1*

a) Modelizar el problema a través de un sistema de ecuaciones lineales indicando el significado de cada incógnita.

b) Intentar diseñar un plan adecuado que cubra las necesidades del deportista.

Resoluciones de algunos ejercicios

El ejercicio 2.5.1 permite la modelización de un problema referido a la transferencia de calor. Sabemos que las temperaturas de los puntos interiores de la placa T_1 a T_6 son:

$$\begin{cases} 4T_1 = T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O} \\ 4T_2 = C_N + T_3 + T_5 + T_1 \\ 4T_3 = T_{C_N} + T_{C_E} + T_6 + T_2 \\ 4T_4 = T_1 + T_5 + T_{C_S} + T_{C_O} \\ 4T_5 = T_2 + T_6 + T_{C_S} + T_4 \\ 4T_6 = T_3 + T_{C_E} + T_{C_S} + T_5. \end{cases}$$

Reemplazando los datos del problema y ordenando las ecuaciones lineales, tenemos el siguiente sistema de 6 ecuaciones lineales con 6 incógnitas:

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 56 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 - T_5 = 25 \\ -T_2 + 4T_3 - T_6 = 62 \\ -T_1 + 4T_4 - T_5 = 41 \\ -T_2 - T_4 + 4T_5 - T_6 = 10 \\ -T_3 - T_5 + 4T_6 = 47. \end{cases}$$

Para hallar el valor de T_2, es posible usar algún método aprendido en la escuela secundaria, aunque quizá resulte tedioso, o bien aplicar el método de eliminación gaussiana, lo que haremos a continuación. Para ello, escribimos la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 56 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 62 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 47 \end{array}\right).$$

Los estudiantes deben resover las operaciones elementales para llegar a la siguiente solución del sistema:

$$(\frac{4110}{161}, \frac{3944}{161}, \frac{4432}{161}, \frac{3480}{161}, \frac{3209}{161}, \frac{3802}{161}).$$

La temperatura T_2 es $T_2 = \frac{3944}{161}$.

Resolvemos el ejercicio 2.5.3, sobre el plan alimentario para un deportista. Este ejercicio permite modelizar a partir de un sistema de ecuaciones lineales. Aquí, encontrar la solución es obtener el plan alimentario adecuado para un deportista de alto rendimiento. Este deportista necesita ingerir por día alimentos que aporten

3.000 calorías, y que contengan 60 gramos de proteínas, 1.000 miligramos de calcio y 10 miligramos de hierro. El plan está restringido a los siguientes 6 alimentos: carne, garbanzos, lechuga, huevos, mayonesa y leche. Además, sabemos que cada 100 g de los alimentos que se mencionan contienen las cantidades de nutrientes que se exponen en la tabla dada. Necesitamos diseñar un plan adecuado que cubra las necesidades del deportista. Para ello, vamos a modelizar el problema tomando como incógnitas $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, que corresponden al número de unidades (cada 100 gramos) necesarias de carne, garbanzos, lechuga, huevos, mayonesa y leche que necesita consumir por día.

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 250x_1 + 360x_2 + 16x_3 + 160x_4 + 718x_5 + 65x_6 = 3.000 \\ 18x_1 + 20x_2 + 1,3x_3 + 12x_4 + 1,1x_5 + 3,3x_6 = 60 \\ 10x_1 + 130x_2 + 30x_3 + 60x_4 + 18x_5 + 120x_6 = 1.000 \\ 2.5x_1 + 8x_2 + 0,8x_3 + 3x_4 + 0,5x_5 + 0,1x_6 = 10. \end{cases}$$

Observemos que este es un sistema de 4 ecuaciones lineales con 6 incógnitas. Este sistema va a tener infinitas soluciones, lo que indica que hay muchas combinaciones posibles de unidades de los comestibles que debe ingerir diariamente ese deportista.

CAPÍTULO

3

Matrices

Las matrices ya aparecieron en el capítulo anterior, al resolver un sistema de ecuaciones lineales. Esta unidad tiene como objetivo mostrar la importancia de una matriz en tanto arreglo o tabla que permite observar cierta información de manera ordenada y que, además, se puede operar con estas tablas para obtener determinada información, que también será expresada mediante matrices.

3.1. Concepto de matriz y sus operaciones

El problema modelo tiene como objetivo mostrar la importancia de organizar la información en una tabla o matriz.

3.1.1. Problema modelo

1. El siguiente diagrama describe un conjunto de 4 estaciones entre las cuales puede haber comunicación o no.

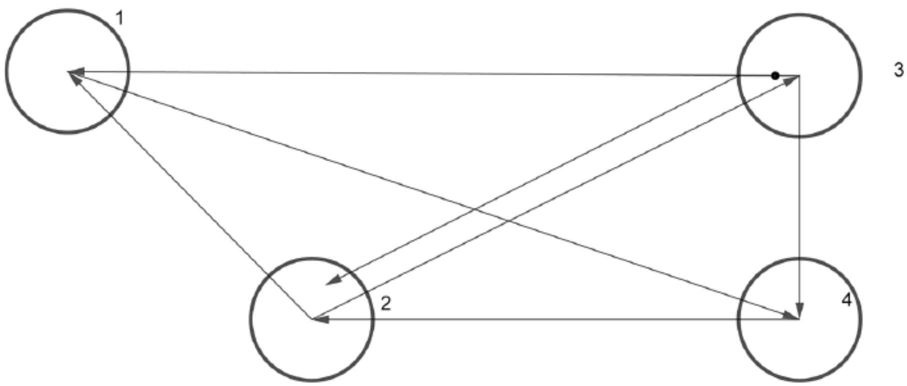


Figura 3.1

Escribir, en una tabla con unos y ceros, la información que describe las posibles comunicaciones directas entre las estaciones. En la tabla, el 1 significa que hay comunicación de una estación a otra y el 0 que no la hay. La comunicación en una misma estación es cero.

2. Un fabricante realiza tres modelos de un producto: A, B y C. Algunas partes se elaboran en la fábrica 1 y se terminan en la fábrica 2.
   En las siguientes tablas se muestran los costos de manufactura y de embarque para los modelos A, B y C, correspondientes a las fábricas 1 y 2.

Fábrica 1	Costo de manufactura	Costo de embarque
Modelo A	32	40
Modelo B	50	80
Modelo C	70	20

Fábrica 2	Costo de manufactura	Costo de embarque
Modelo A	40	60
Modelo B	50	50
Modelo C	130	20

   ¿Cuáles son los costos totales de manufactura y embarque de cada modelo?

3. Esta tabla muestra los precios de tres productos almacenados en una bodega

18,95	14,75	8,6

   . Se decide vender estos artículos un 20 % más baratos.
   a) Escribir una tabla que presente el descuento de cada artículo.
   b) Escribir una tabla que presente los nuevos precios de cada artículo.

4. En un instituto se dan los cursos de Inglés 1, Inglés 2 e Inglés 3. La siguiente tabla muestra la cantidad de horas de clases, de tutorías y de guardias que debe cumplir, semanalmente, cada profesor, según el nivel de Inglés que dicte.

Materia	Horas de clase	Horas de guardia	Horas de tutoría
Inglés 1	20	5	3
Inglés 2	18	6	5
Inglés 3	22	1	3

   El instituto les paga a los profesores 12 dólares por cada hora de clase, 3 dólares por cada hora de guardia y 6 dólares por cada hora de tutoría.
   a) ¿Cuánto paga el instituto, por semana, por la enseñanza de cada nivel?

b) Si en el instituto hay 5 profesores para Inglés 1, 4 profesores para Inglés 2 y 6 profesores para inglés 3, ¿cuánto paga por las clases, por las guardias y por las tutorías, semanalmente?

c) ¿Cuánto le cuesta al instituto, por semana, enseñar los tres niveles de Inglés con esa cantidad de profesores?

Resolución del problema modelo

En el punto 1 se pide escribir en una matriz de unos y ceros cierta información dada en un diagrama de flechas. Como en el diagrama hay cuatro estaciones comunicadas de alguna manera, la matriz o tabla tiene cuatro filas y cuatro columnas, es decir, es de tamaño 4×4. La diagonal de este arreglo es de ceros, ya que no es necesaria la comunicación en la misma estación.

Una manera de escribir esta información es en una tabla como esta:

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4
Estación 1	0	0	0	1
Estación 2	1	0	1	0
Estación 3	1	1	0	1
Estación 4	0	1	0	0

Otra manera de organizar la información es en una matriz que contiene cuatro filas y cuatro columnas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El número que se encuentra en la fila 3 columna 1 es 1. Este número indica que hay comunicación de la estación 3 a la estación 1. En cambio, no hay comunicación desde la estación 1 a la 3. Por este motivo, en la fila 1 columna 3 hay un cero.

Las filas y columnas, en este caso, corresponden a las distintas estaciones; por ejemplo, la fila 1 indica la comunicación de la estación 1 con cada una de las cuatro estaciones.

En el punto 2 del problema modelo, se pide obtener los costos totales de manufactura y embarque de los tres tipos de modelos de un producto que realizan las fábricas 1 y 2. La información de cada fábrica se encuentra en una tabla. Para obtener los costos totales, necesitamos sumar la información de cada elemento de una tabla con la información sobre el mismo elemento de la otra tabla. La tabla resultante tiene el mismo tamaño, las fila de la tabla corresponden a cada modelo y en cada columna aparece el costo total de manufactura y de embarque. Es decir que la información, en esa última tabla, respeta las posiciones en que aparecen en las anteriores.

	Costo total de manufactura	Costo total de embarque
Modelo A	72	100
Modelo B	100	130
Modelo C	200	40

El punto 3 introduce otra operación entre matrices: la multiplicación de un número por una matriz. Para resolver el ítem a), necesitamos entender qué significa el descuento de cada artículo. Si queremos realizar un descuento del 20 % a un artículo que vale 18,95, debemos realizar la siguiente operación: $0.2 \times 18,95 = 3,79$, Por lo tanto, un descuento del 20 % en un artículo que vale 18,95 corresponde a 3,79 pesos. Entonces, el precio con descuento es de $18,95 - 3,79 = 15,16$. De la misma manera se obtienen los descuentos de los otros productos y los precios a los que se venden.

Los descuentos de cada producto se representan en la siguiente tabla:

3,79	2,95	1,72

Los precios con descuento se pueden ubicar en la siguiente tabla:

15,16	11,8	6,88

Por último, el punto 4 le da un cierto sentido a la multiplicación de matrices.

En este problema identificamos tres tablas o matrices. La primera corresponde a las horas de clase, de guardia y de tutoría por profesor. Llamamos a esta primera tabla M, y corresponde a una matriz de tres filas y tres columnas en la que cada fila corresponde al nivel de inglés y cada columna, a la cantidad de horas de clase, de guardia o de tutoría. Más precisamente, tenemos que

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Otra información que tenemos es lo que le paga el instituto a cada profesor por la hora de clase, la hora de guardia y la de tutoría. Podemos escribir esta información en una tabla, que llamamos C, que tiene 1 fila y 3 columnas:

C	Hora de clase	Hora de guardia	Hora de tutoría
Dólares	12	3	6

Por último, tenemos una tabla, que llamamos P, que representa la cantidad de profesores asignados a cada nivel de Inglés. Esta tabla también tiene una fila y tres columnas:

P	Inglés 1	Inglés 2	Inglés 3
Cantidad de profes	5	4	6

La primera información que se pide es determinar cuánto le cuesta semanalmente al instituto, por profesor, enseñar Inglés 1, Inglés 2 e Inglés 3. La información de los montos en dólares está en las tablas M y C.

Para saber cuánto le paga el instituto a un profesor por enseñar Inglés 1, tenemos que resolver:

$$20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273.$$

El instituto le paga 273 dólares por semana a un profesor por enseñar Inglés 1.

De la misma manera, si queremos saber cuánto le cuesta enseñar Inglés 2, tenemos que resolver:

$$18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264.$$

Al instituto le cuesta, semanalmente, 264 dólares enseñar Inglés 2.

Por último, paga $22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285$ dólares a cada profesor por enseñar Inglés 3.

Otra información por determinar es el número total de clases, el de guardias y el de tutorías. Para ello, es necesaria la información de la tabla M, que indica la cantidad de horas de clase, de guardia y de tutoría, y la tabla P que indica la cantidad de profesores asignados a cada uno de los niveles de Inglés.

De esta manera, el número total de clases es:

$$5 \cdot 20 + 4 \cdot 18 + 6 \cdot 22 = 304.$$

El número total de guardia es:

$$5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 55.$$

Y el número total de tutorías es:

$$3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 53.$$

Por último, con toda la información hallada, debemos indicar cuánto le cuesta por semana al instituto enseñar los tres niveles de Inglés, teniendo en cuenta la cantidad de horas que se imparten en cada nivel, con la cantidad de profesores que tiene para cada uno de ellos.

Sabemos que la cantidad total de horas de clase es 304 y que cada hora de clase cuesta 12 dólares. También sabemos que la cantidad de horas de guardia es 55 y que cada hora de guardia cuesta 3 dólares. Por último, sabemos que la cantidad de horas de tutoría es 53 y que cada hora cuesta 6 dólares. Al instituto le cuesta:

$$304 \cdot 12 + 55 \cdot 3 + 53 \cdot 6 = 4131.$$

Sobre las operaciones con matrices a partir de lo trabajado

En el punto 2 sumamos dos matrices que representan los costos de manufactura y embarque para los modelos A, B, C, de dos fábricas.

$$F_1 := \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{pmatrix} \qquad F_2 := \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{pmatrix}.$$

El costo total es $F_1 + F_2$.

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 72 & 100 \\ 100 & 130 \\ 200 & 40 \end{pmatrix}.$$

En el punto 3 a) debemos encontrar el descuento de cada artículo. Para ello, dada la matriz

$$P := \begin{pmatrix} 18,95 & 14,75 & 8,76 \end{pmatrix},$$

correspondiente a tres precios, resolvemos la operación $0,2 \cdot P$, multiplicación de un escalar por una matriz.

$$0,2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3,79 & 2,95 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

Para obtener los precios con descuento podemos hacer $A - 0,2 \cdot A = 0.8 \cdot A$.

Finalmente, en el punto 4 multiplicamos matrices. Tenemos tres matrices involucradas:

- la matriz M, de tamaño 3×3, que indica la cantidad de horas de clase, de guardia y de tutoría para cada uno de los tres niveles de Inglés por profesor;

- la matriz C, de tamaño 3×1, que indica lo que paga el instituto por cada hora de clase, de guardia y de tutoría.

$$C := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- la matriz P, de tamaño 1×3, que indica la cantidad de profesores asignados a cada nivel de Inglés.

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aclaración

Antes de resolver el problema mediante la multiplicación de matrices, es importante aclarar que, dados A, B dos matrices de tamaño adecuado, en el libro usaremos la notación $A \cdot B$ o $A\,B$ de manera indistinta para indicar la multiplicación de la matriz A por la matriz B.

De la misma manera, dado $k \in \mathbb{R}$ y A una matriz, usaremos la notación $k \cdot A$ o $k\,A$ de manera indistinta para indicar la multiplicación escalar entre el número k y la matriz A.

En el punto a) tenemos que calcular $M \cdot C$. La fila 1 de M indica las horas de clase, de guardia y de tutoría de Inglés I y C indica lo que paga el instituto por cada hora de clase, de guardia y de tutoría, respectivamente. Por lo tanto, tiene sentido multiplicar la fila 1 de M por la última columna de C, es decir:

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273.$$

Este número expresa que al instituto le cuesta 273 dólares enseñar Inglés 1, de acuerdo con la cantidad de horas de clase, de guardia y de tutoría que asigna.

De la misma manera, si multiplicamos la fila 2 de la matriz M por C obtenemos lo que le sale al instituto enseñar Inglés 2. es decir,

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264.$$

Por último si multiplicamos la fila 3 de M por C, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 22 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285.$$

Este número indica que al instituto le cuesta 285 dólares por semana enseñar Inglés 3. Así, la información de lo que le cuesta al instituto enseñar cada nivel de Inglés queda resumida en la siguiente matriz:

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 285 \end{pmatrix}.$$

Corresponde a los estudiantes resolver los ítem b y c del punto 4 multiplicando matrices.

3.1.2. Guía de problemas

Los ejercicios de esta sección que se resuelven con la escritura de una matriz o tabla.

Ejercicio 3.1.1. *Escribir la información de las siguientes situaciones en forma de matrices o tablas, y resolver las consignas.*

a) *Una familia gasta en enero* 400 *pesos en comida y* 150 *pesos en ropa; en febrero,* 500 *en comida y* 100 *en ropa; y en marzo,* 300 *en comida y* 200 *en ropa.*

b) *La distancia en millas terrestres de Londres a Madrid es de* 785*, de Londres a Nueva York es de* 3.469*; de Londres a Tokio es de* 5.959*; de Madrid a Nueva York es de* 3.593 *y de Madrid a Tokio es de* 6.706*. Tokio está a* 6.757 *millas de Nueva York.*

- *¿De qué tamaño son las matrices propuestas? ¿Qué indica cada fila?¿Qué indica cada columna?*
- *Dar la información proporcionada por la fila* 1 *columna* 3 *y de la fila* 2 *columna* 1.

Ejercicio 3.1.2. *Una empresa de electrodomésticos tiene tres fábricas: una en Madrid, otra en Málaga y la tercera en Vigo. La producción semanal de cada fábrica está representada en la siguiente matriz A:*

	Madrid	*Málaga*	*Vigo*
Frigoríficos	*150*	*140*	*130*
Lavarropas	*175*	*155*	*125*
Lavaplatos	*160*	*140*	*100*

a) Escribir la fila 2 *y la columna* 3*, e interpretar qué información dan.*

b) Interpretar qué indica el lugar a_{12} y a_{33} de A.

Ejercicio 3.1.3. *Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias están expresados en la siguiente matriz A.*

	pan	*agua*	*leche*
F1	*450*	*800*	*650*
F2	*500*	*810*	*620*
F3	*200*	*500*	*600*

La evolución de los precios de los años 2000 *al* 2003 *está reflejada en la siguiente matriz B, expresada en céntimos de euro:*

	2000	*2001*	*2002*	*2003*
pan	*85*	*90*	*90*	*95*
agua	*28*	*30*	*30*	*35*
leche	*70*	*72*	*75*	*80*

a) Hallar, si es posible, AB y BA, e indicar qué información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto $C = AB$?

Ejercicio 3.1.4. *Un constructor debe adquirir ladrillos (L), tejas (T), madera (M) y cemento (C), y considera tres proveedores: P, Q y R. Los precios de cada proveedor por paquete de materiales están expresados en miles de dólares en la siguiente matriz:*

	L	*T*	*M*	*C*
P	*8*	*13*	*6*	*6*
Q	*6*	*12*	*7*	*8*
R	*7*	*14*	*6*	*7*

El constructor tiene que comenzar tres obras, para las cuales necesita:

a) Primera obra: 24 paquetes de ladrillos, 5 de tejas, 12 de madera y 18 de cemento.

b) Segunda obra: 20 paquetes de ladrillos, 7 paquetes de tejas, 15 de madera y 20 de cemento.

c) Tercera obra: 20 paquetes de ladrillos, 4 de tejas, 15 de madera y 15 de cemento.

El constructor quiere adquirir todos los materiales de cada obra en el mismo proveedor. ¿Qué proveedor es el más económico para cada una?

Ejercicio 3.1.5. *Una industria produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos: A, B y C. La siguiente matriz muestra la producción semanal de tornillos:*

	A	*B*	*C*
P	*2.000*	*2.500*	*3.000*
E	*2.500*	*3.500*	*4.000*

El porcentaje de tornillos defectuosos para el tipo A es del 5 %, para el tipo B es del 4 % y para tipo C es del 2 %. Calcular el número de tornillos planos y de estrella que no son defectuosos en la producción de una semana.

Ejercicio 3.1.6. *Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero, el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente compró 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C. En el mes de febrero, el primer y el segundo clientes duplicaron la cantidad de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo y el cuarto cliente no hizo ningún pedido.*

a) Construir las matrices correspondientes a las ventas de enero y de febrero.

b) Hallar la matriz correspondiente a las ventas de enero y febrero.

c) *Si los precios de los artículos son 100 pesos, 80 pesos y 90 pesos, respectivamente, calcular cuánto factura la fábrica por los pedido que le hicieron en los meses de enero y febrero*

3.1.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 3.1.3 se pregunta si es posible hacer $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Observemos que, por el tamaño de las matrices, al hacer $A \cdot B$ nos devuelve una matriz de tamaño 3×4, pero no podemos hacer $B \cdot A$, ya que B es de tamaño 3×4 y A es de tamaño 3×3.

La matriz $A \cdot B$ indica los gastos de cada una de las tres familias en pan, agua y leche en los años 2000 2001, 2002 y 2003. Esta matriz es

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 106.150 & 111.300 & 113.250 & 122.750 \\ 108.580 & 113.940 & 115.800 & 125.450 \\ 73.000 & 76.200 & 78.000 & 84.500 \end{pmatrix}.$$

El elemento c_{34} de la matriz producto $C = A \cdot B$ se encuentra ubicado en la fila 3, columna 4 de dicha matriz. Este número es $c_{34} = 84.500$ y corresponde a los gastos de pan, agua y leche de la familia F_3 en el año 2003.

En el ejercicio 3.1.5 se debe calcular el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

La información de la producción semanal de tornillos planos (P) y de estrella (E) de tres modelos distintos, A, B y C, la tenemos guardada en la siguiente matriz:

$$M_{P,E} := \begin{pmatrix} 2.000 & 2.500 & 3.000 \\ 2.500 & 3.500 & 4.000 \end{pmatrix}.$$

Además, tenemos la información de que existe un 5 % de tornillos de tipo A defectuosos, un 4 % de tornillos defectuosos de tipo B y un 2 % de tonillos defectuosos de tipo C. Por lo tanto, para ver el número de tornillos planos y de estrella no defectuosos, hay que multiplicar la matriz $M_{P,E}$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.96 \\ 0.98 \end{pmatrix},$$

que corresponde al porcentaje de los tornillos no defectuosos de cada tipo:

$$\begin{pmatrix} 2.000 & 2.500 & 3.000 \\ 2.500 & 3.500 & 4.000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,96 \\ 0,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.240 \\ 9.655 \end{pmatrix}.$$

Por lo que hay 7.240 tornillos planos no defectuosos y 9.655 tornillos estrella no defectuosos.

3.2. Propiedades de las matrices

El objetivo del problema modelo es conjeturar, a partir de la exploración, ciertas propiedades relacionadas con la suma y producto entre matrices.

3.2.1. Problema modelo

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, resolver las siguientes actividades:
   - ¿Qué tamaño tiene la matriz $5B$? Indicar cada uno de sus elementos.
   - Calcular B^T. ¿Qué relación hay entre B y $(B^T)^T$?
   - Calcular $A - B^T$.
   - ¿Cuánto vale $A + (-A)$?
   - ¿Es posible calcular AB y BA? Si la respeusta es afirmativa, ¿se puede decir que son matrices iguales?
   - ¿Cuánto vale $(AB)^T$? ¿Existe una relación entre esta matriz y la matriz $B^T A^T$?

   Los cálculos pueden resolverse con Geogebra, utilizando la Vista Cas. Para escribir la matriz A tenemos que usar $A := \{\{2, -3, 5\}, \{6, -5, 4\}\}$. A partir de los cálculos, conjeturar propiedades referidas a las operaciones con matrices, es decir, igualdades que valen para todas las matrices de tamaño adecuado.
2. Sean las matrices
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$
   y
$$B := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Encontrar la segunda columna de AB y la primera fila de AB sin hacer todas las multiplicaciones para hallar AB.

3. Usando Geogebra, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas y justificar las decisiones:
   - Si la primera y segunda columna de B son iguales, entonces la primera y segunda columna de AB son iguales.
   - Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2, entonces $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
   - Sean A, B dos matrices de tamaño 2×2. Entonces se satisface la siguiente igualdad: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
4. Explorar con Geogebra y buscar matrices de tamaño 2×2 que cumplan:
   - $A^2 = I$.
   - $B^2 = 0$, pero $B \neq 0$, donde 0 corresponde a la matriz nula.
   - $AB = AC$, pero $B \neq C$.

Resolución del problema modelo

En el punto 1 del problema, se pide determinar el tamaño de la matriz $5B$. Como B es una matriz de tamaño 3×2 (tiene 3 filas y 2 columnas), entonces $5B$ tiene el mismo tamaño. Para calcular los elementos de esta matriz, multiplicamos por 5 cada elemento de la matriz B:

$$5B = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -15 & -25 \\ 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, B^T es una matriz cuyas filas son las columnas de B. Por lo tanto, como B es una matriz de tamaño 3×2, entonces B^T es de tamaño 2×3. Más precisamente,

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $(B^T)^T$ es una matriz cuyas filas son las columnas de B^T. Concluimos que $(B^T)^T = B$.

También tenemos que $A - B^T$ es una matriz de tamaño 2×3, formada por los siguientes elementos:

$$A - B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A + (-A)$ corresponde a la matriz nula de tamaño igual a la matriz A.

Observemos que es posible calcular AB y BA, pero ambas matrices son de tamaño distinto: la primera es de tamaño 2×2 y la segunda es de tamaño 3×3. Por lo tanto, no son iguales.

Por último, vamos a realizar la operación $(AB)^T$ y $B^T A^T$ con Geogebra, Vista Cas, para aprender cómo se usan los comandos.

```
A:={{2,-1,0},{6,4,5}}
B:={{2,6},{-3,-5},{5,4}}
Transpose(A*B)
{{7,47},{17,77}}
Transpose(B)*Transpose(A)
{{7,47},{17,77}}
```

A partir de estos cálculos,llegamos a conjeturar las siguientes propiedades:

1. $A + (-A) = 0$, donde 0 es la matriz nula.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$, cuando tiene sentido multiplicar las matrices A y B.

Para el punto 2, tenemos que la matriz A tiene 3 filas y dos columnas, y la matriz B tiene dos filas y tres columnas. Por lo tanto, la matriz AB tiene tres filas y tres columnas. Si queremos encontrar su segunda columna, deberíamos hacer las siguientes cuentas:

- Fila 1 de A multiplicado por la columna 2 de B, y ese elemento se encuentra en el lugar correspondiente a la fila 1, columna 2 de AB, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7.$$

- Fila 2 de A multiplicado por la columna 2 de B, y ese elemento se encuentra en el lugar correspondiente a la fila 2, columna 2 de AB, es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 17.$$

- Fila 3 de A multiplicado por la columna 2 de B, y ese elemento se encuentra en el lugar correspondiente a la fila 3 columna 2 de AB, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7.$$

Por lo tanto, si queremos encontrar la columna 2 de AB, necesitamos multiplicar A por la columna 2 de B, es decir:

$$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\17\\7\end{pmatrix}.$$

Para encontrar la primera fila de AB, multiplicamos la fila 1 de A por la matriz B, es decir:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}4 & 7 & 6\end{pmatrix}.$$

En el punto 3 del problema modelo, la primera afirmación, “Si la primera y segunda columna de B son iguales entonces la primera y segunda de AB son iguales”, es verdadera. Sea

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1 & C_1\end{pmatrix},$$

donde cada $A_i=(a_{i1},a_{i2})$ corresponde la fila i-ésima de la matriz A, para cada $i=1,2$ y $C_1=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\end{pmatrix}$.

Como la columna 1 y 2 de la matriz B son iguales, es decir $C_1=C_2$, entonces multiplicar cada fila de A por la primera columna de B es lo mismo que multiplicar cada fila de A por la segunda columna de B. Los números de estas multiplicaciones corresponden a los valores de la primera y segunda columna de AB:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1C_1 & A_1C_1\\A_2C_1 & A_2C_1\end{pmatrix}.$$

La afirmación “Si A y B son matrices de tamaño 2×2 entonces $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$” es falsa. En efecto, usando la propiedad distributiva:

$$(A-B)(A+B)=A(A+B)-B(A+B)=A^2+AB-BA-B^2.$$

Si queremos que $A^2+AB-BA-B^2$ sea igual a A^2-B^2, entonces tiene que pasar que AB sea igual a BA, pero esto es falso, porque sabemos que la propiedad conmutativa no vale para el producto de matrices.

A continuación se da un ejemplo de que $(A-B)(A+B)$ es distinto que A^2-B^2. Sean

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\quad B:=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix},$$

tenemos que:

$$(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -6\end{pmatrix},\quad A^2-B^2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

La última afirmación, "Si A y B son dos matrices cuadradas entonces $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$", es verdadera. Para probarlo, usamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de matrices.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2.$$

Finalmente, en el punto 4 del problema modelo, se pide encontrar matrices que cumplan determinadas afirmaciones.

Para el primer ítem, si tomamos $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, entonces, $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Para el segundo ítem, observemos que si tomamos $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, entonces, $B^2=0$ donde B no es la matriz nula.

Para el tercer ítem, observemos que si tomamos $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, entonces $AB=AC$ pero B es distinto de C.

3.2.2. Guía de problemas

En esta sección, se proponen ejercicios relacionados con ciertas propiedades de las operaciones con matrices.

Ejercicio 3.2.1. *Sean* $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calcular $A+B,\quad A-B,\quad -3A,\quad -5A+2B$.

b) Calcular A^T, B^T *y* $(A+B)^T$. *Estudiar los cálculos y enunciar una propiedad.*

c) Calcular $-A^T$ *y* $(-A)^T$ *Dar una propiedad.*

d) Calcular la entrada $(1,2)$ *y* $(3,1)$ *de la matriz producto* AC.

e) Calcular $(AC)^T$ *y* C^TA^T. *¿Qué propiedad se puede enunciar?*

f) *Hallar la matriz opuesta* $-A$ *y probar que* $A + (-A) = 0$.

g) *¿Es posible hallar una matriz* D *no nula, tal que* $AD = 0$*?*

h) *Determinar una matriz* E *tal que* $A + E = 0$.

Ejercicio 3.2.2. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

a) *Calcular* AC *y* BC. *Del resultado obtenido, ¿qué propiedad de los números reales no se puede trasladar a matrices?*

b) *Calcular* AC *y* CA. *¿Qué propiedades de los números reales no se puede trasladar a matrices?*

c) *Calcular* $AB - AC$ *y* $A(B - C)$. *Con los cálculos realizados, ¿qué propiedad de los números reales se puede trasladar a las matrices?*

d) *Calcular* $3A$ *y* $3AI$, *donde* I *es la matriz identidad. ¿Qué propiedad se puede enunciar con lo calculado?*

Ejercicio 3.2.3. *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) *Calcular* A^2, A^3, A^{10}, A^{11}. *Utilizando estos cálculos, generalizar y calcular* A^n *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b) *Usando el ítem anterior, calcular* $A + A^2 + A^3A^4 + A^5 + A^6$.

c) *Calcular* B^n *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

d) *Calcular* C^n *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.2.4. *Resolver las siguientes consignas:*

a) *Si* A *es una matriz de* 3×5 *y el producto* AB *es* 3×7, *¿cuál es el tamaño de* B*?*

b) *¿Cuántas filas tiene* B *si* BA *es una matriz de* 2×6*?*

c) *Si la segunda columna de* B *es toda de ceros, ¿qué se puede decir acerca de la segunda columna de* AB*?*

d) *Dar un ejemplo de una matriz tal que* $A^2 = A^3 = 0$ *y en el que la matriz* A *no sea nula.*

Ejercicio 3.2.5. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. *Hallar los valores de* k *tales que satisfagan que* $AB = BA$.

3.2.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía

En el ejercicio 3.2.2, tenemos los siguientes cálculos para el primer ítem:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix} \qquad B \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}.$$

Esos cálculos indican que $A \cdot C = B \cdot C$ pero $A \neq B$. Esto significa que no podemos extender la propiedad cancelativa de números reales a matrices.

Con las cuentas del ítem b) concluimos que la propiedad conmutativa del producto que se cumple en el conjunto de los números reales no se puede extender al conjunto de matrices. Más precisamente, observemos que $AC = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$, en cambio $CA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo que $AC \neq CA$.

Con las cuentas del ítem c) deducimos que podemos trasladar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma que es válida en los números reales al conjunto de las matrices. Observemos que

$$A \cdot B - A \cdot C = \begin{pmatrix} 43 & 56 \\ 63 & 80 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 75 \\ 9 & 107 \end{pmatrix}$$

y que

$$A \cdot (B - C) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 75 \\ 9 & 107 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$.

Es una actividad para los estudiantse demostrar que $3 \cdot A = 3 \cdot A \cdot I$. Esto permitirá conjeturar que I es el neutro del producto en el conjunto de todas las matrices.

A continuación, resolvemos el ítem a) del ejercicio 3.2.4. Si A es una matriz de 3×5 y el producto $A \cdot B$ es de tamaño 3×7, es porque B tiene que ser de tamaño 5×7.

En el ítem b) dice que $B \cdot A$ es una matriz de tamaño 2×6. Este tamaño ofrece la información de las filas de B y las columnas de A, por lo que la matriz B tiene dos filas.

En el ítem c), sabemos que la segunda columna de B es de ceros, entonces al hacer los productos para conseguir la matriz AB, concluimos que la segunda columna de esta última matriz también es nula.

En el ítem d) hay que buscar una matriz A no nula. Pero cuando calculamos tanto A^2 como A^3, nos da la matriz cero. Los estudiantes verificarán que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ cumple con lo pedido.

3.3. La inversa de una matriz y sus aplicaciones

El objetivo del siguiente problema modelo es estudiar la inversa de una matriz cuadrada y su importancia para decidir si un sistema tiene solución o no.

3.3.1. Problema modelo

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, ¿es posible encontrar una matriz B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

   ¿Sucede lo mismo con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$?

2. Encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

   Decimos que una matriz A de tamaño $n \times n$ es inversible si existe una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Si esto ocurre, notamos a B con A^{-1} y decimos que A^{-1} es la inversa de A.

3. Si se sabe que la inversa de una matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ¿es posible calcular esa matriz?

4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 3x + 4z = b \\ x + y = c \end{cases}$$

   a) Determinar si tienen solución única o no para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   b) Encontrar las soluciones del sistema en función de cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. Usando Geogebra, encontrar ejemplos que muestren que la siguiente afirmación es falsa: *Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2 inversibles entonces $A+B$ es inversible.*
6. En una actividad de campo, un estudiante lanza varias veces una pelota. Sus compañeros, con un sensor de movimiento, toman los datos que aparecen registrados en la siguiente tabla. En la primera columna de la tabla se encuentra la distancia que la bola ha viajado horizontalmente y en la segunda columna, la altura sobre el nivel del suelo.

Distancia horizontal (pies)	Altura (pies)
0	5
20	23
40	47
100	55
120	53
140	47
160	37
200	5

- Definir las variables del problema e identificar las restricciones sobre los datos.
- Ubicar los puntos dados en el plano cartesiano. Llamar x a la distancia horizontal e y a la altura que alcanza la pelota. ¿Tiene sentido unir los puntos mediante una línea continua? ¿Por qué?
- Suponer que la ecuación que modela la trayectoria de la pelota está dada por $y = ax^2 + bx + c$. Seleccionar tres puntos cualesquiera de la tabla y plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar a, b, c.
- ¿Cuál es la matriz de coeficientes asociada al sistema planteado antes? ¿Esa matriz es inversible?
- Si la respuesta del ítem anterior es afirmativa, buscar la solución del sistema a partir de la inversa de la matriz de coeficientes asociado al sistema.
- Buscar otra manera de encontrar la solución del sistema planteado.
- Validar algunos de los datos de la tabla con la ecuación encontrada.
- ¿Qué representa el dato $(100, 55)$?

Resolución del problema modelo

El primer punto tiene como objetivo encontrar la inversa de A. En este sentido, dado $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, buscamos una $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto es lo mismo que encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -2a + 3c & -2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para encontrar los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, necesitamos calcular, simultáneamente, dos sistemas de ecuaciones lineales:

1. $$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ -2a + 3c = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ -2b + 3d = 1 \end{cases}$$

Se observa que ambos sistemas de ecuaciones lineales tienen la misma matriz de coeficientes, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El primer sistema tiene como matriz de términos independientes a

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El segundo sistema de ecuaciones lineales tiene como matriz de términos independientes a

$$B_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para encontrar la matriz B, debemos triangular la matriz formada por la matriz de coeficientes A y la de términos independientes B_1 y B_2:

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & |1 & 0 \\ -2 & 3 & |0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando el método de Gauss–Jordan (empleando las operaciones elementales utilizadas en el método de eliminación, pero triangulando superior e inferiormente), podemos transformar la matriz $(A|I)$, en una matriz de la forma

$$(I|B),$$

donde I es la matriz identidad y B es la matriz buscada.

Si esto ocurre, es posible afirmar que A es inversible y su inversa es B; es decir, la matriz que buscamos es la matriz B, que cumple que $A \cdot B = I$.

En el ejemplo, mediante operaciones elementales, transformamos la matriz $(A|I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & |\frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 1 & |\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

También se encuentra B utilizando Geogebra, mediante el comando Inversa(A).

Así, concluimos que A es inversible y la inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Cuando queremos encontrar B, de manera que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

observamos que, mediante el método de Gauss–Jordan, la matriz de la forma $(A|I)$ no se puede tansformar en una matriz $(I|B)$. Más precisamente, sea

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & |1 & 0 \\ -4 & -2 & |0 & 1 \end{pmatrix},$$

mediante operaciones elementales, obtenemos la siguiente matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & |1 & 0 \\ 0 & 0 & |2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, no existe B tal que $A \cdot B = I$, en este caso. Por lo que concluimos que A no es inversible.

En el punto 2, la inversa de la matriz A es $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

En el punto 3, sabemos que la inversa de una matriz A es

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El problema es que desconocemos quién es A, aunque sabemos que $A \cdot B = I$.

Con un trabajo similar al realizado en el punto 1 del problema modelo, encomtramos la matriz A. Más aún, B tiene inversa, y es A, por lo que podemos calcular A usando Geogebra. Para ello, en la Vista Cas, recurrimos al comando Inversa(B). Así, tenemos que la matriz A es $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. En conclusión, la inversa de la inversa de A es A.

Se propone a los estudiantes que empleen el método de eliminación Gaussiana para resolver el punto 4. Resolveremos este ejercicio aplicando el siguiente resultado que involucra matrices inversas.

Teorema 3.3.1. *Sean A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times 1$. Sea el sistema de ecuaciones lineales*

$$AX = B.$$

El sistema tiene solución única si y solo si A es inversible.

En este caso la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobemos si A es inversible y, en ese caso, calculemos la inversa. Vimos que para que una matriz sea inversible, tenemos que poder llevarla a la matriz identidad mediante operaciones elementales. Más adelante, se verá una cantidad invariante que nos indica si una matriz cuadrada tiene inversa o no antes de calcularla.

Recordamos que, para encontrar la inversa de A, usamos el siguiente procedimiento:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Mediante el método de Gauss–Jordan, queremos llevarla a $(I|A^{-1})$. Para ello, eligiendo 1 como el pivote de la fila 1 y mediante las operaciones elementales, tenemos:

$$3F_1 - F_2 \to F_2, \qquad F_1 - F_3 \to F_3,$$

la siguiente operación matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Luego, eligiendo como pivote el 6 de la fila 2 tenemos mediante la operación elemental:

- $F_2 - 6F_3 \to F_3$,

la siguiente operación matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -3 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

Tomando ahora como pivote el -1 de la fila 3 y haciendo las siguientes operaciones elementales

$$F_1 - F_3 \to F_1, \qquad F_2 - 7F_3 \to F_2,$$

tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & 24 & 6 & -42 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

De la misma manera, haciendo la operación elemental $3F_1 - F_2 \to F_1$ tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -12 & -3 & 24 \\ 0 & 6 & 0 & 24 & 6 & -42 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

Por último, haciendo las operaciones elementales:

$$\frac{F_1}{3} \to F_1, \qquad \frac{F_2}{6} \to F_2, \qquad \frac{F_3}{-1} \to F_3,$$

tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

Así deducimos que A tiene inversa, que es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única y esta es:

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En el punto 5, la afirmación es falsa. Para justificar esto podemos buscar con Geogebra dos matrices A y B que sean inversas, pero que, cuando se suman, ya no lo sean. Dejamos a cargo del estudiante la búsqueda de ejemplos.

Por último, en el punto 6 hay dos variables. La primera corresponde a la distancia horizontal (x) y la segunda, a la altura en pies (y). Los estudiantes deben graficar cada uno de los puntos (x, y) en ejes cartesianos para observar que corresponde a una parábola continua; ya que la pelota es arrojada en todos los tiempos posibles, teniendo siempre una distancia horizontal y una altura hasta que cae.

A continuación, seleccionamos 3 puntos, por ejemplo, los tres primeros: $(0, 5)$, $(20, 23)$ y $(40, 47)$. A partir de la función que modeliza el problema, encontramos el siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas reales a, b, c:

$$\begin{cases} 20^2a + 20b + c = 23 \\ 40^2a + 40b + c = 47 \\ c = 5 \end{cases}$$

Usando la herramienta de Geogebra Soluciones C(lista de ecuaciones, lista de variables), se obtiene que la solución a ese sistema es $a = \frac{3}{400}$, $b = \frac{3}{4}$ y $c = 5$.

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales es:

$$A := \begin{pmatrix} 20^2 & 20 & 1 \\ 40^2 & 40 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible entonces decir que dicha matriz es inversible y que la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} & \frac{1}{800} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{40} & \frac{-3}{40} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución del sistema a partir de la inversa de la matriz A, tenemos que plantear:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 47 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{3}{4} & 5 \end{pmatrix}.$$

3.3.2. Guía de problemas

Los ejercicios que siguen trabajan con la inversa de una matriz y algunas de sus aplicaciones.

Ejercicio 3.3.2. *Dadas las matrices* $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$*, determinar si son inversibles o no. Si es posible, hallar la inversa de cada matriz.*

Ejercicio 3.3.3. *Considerar el sistema*

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Escribir el sistema en forma matricial.

b) Calcular la inversa de la matriz de coeficientes.

c) Resolver el sistema de ecuaciones con el método de eliminación de Gauss. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

d) ¿Qué se puede conjeturar a partir de los dos ítems anteriores?

Ejercicio 3.3.4. *Encontrar todos los valores de k de manera que* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k+1 & k-4 \end{pmatrix}$ *no sea inversible.*

Ejercicio 3.3.5. *Agregar una fila a* $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de manera que la matriz resultante sea inversible. ¿Cómo tiene que ser la elección de la fila para que la matriz resultante sea inversible?*

3.3.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 3.3.4 debemos encontrar k para que la matriz resulte no inversible. Es útil usar Geogebra para hallar esos valores:

```
A:={{2,3},{k+1,k-4}}
Inversa(A)
{{(-k+4)/(k+11), 3/(k+11)},{(k+1)/(k+11),(-2)/(k+11)}
```

En este punto, observemos que Geogebra da la información de todas las posibles inversas de la matriz dada. Para que estas matrices tengan sentido, hay que pedir que k no sea -11. Por lo tanto, el valor de k para que la matriz no sea inversible es -11. Dejamos como tarea al estudiante encontrar el valor de k para que la matriz A sea inversible, usando el proceso de Gauss-Jordan.

En el ejercicio 3.3.5 debemos agregar una fila a M para que resulte inversible. Para ello, agregamos cualquier fila que no sea un múltiplo de ninguna de las otras. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Ecuaciones con matrices

Para terminar con la unidad de matrices, se propone un problema modelo de ecuaciones con matrices.

3.4.1. Problema modelo

Dados $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X de tamaño 2×2 en cada caso.

a) $A \cdot X = B$

b) $A \cdot X = X \cdot A$

c) $A + A \cdot X = B$

d) $2 \cdot X + A \cdot X = I$, donde I es la identidad de tamaño 2.

Resolución del problema modelo

En el ítem a), la ecuación por resolver es:

$$A \cdot X = B.$$

Observemos que A es una matriz inversible cuya inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De esta manera,

$$\begin{array}{rcl} A \cdot X & = & B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X & = & A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X & = & A^{-1} \cdot B \\ X & = & A^{-1} \cdot B, \end{array}$$

donde I es la matriz de tamaño 2×2. Así, la matriz que buscamos es $X = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En el ítem b) hay que encontrar X tal que $A \cdot X = X \cdot A$. Si proponemos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}.$$

Planteando igualdades entre elementos, tenemos que $c = 0$, $a = d$ y b cualquier número real.

En el ítem c) se pide resolver

$$A + A \cdot X = B.$$

Haciendo cuentas entre matrices y usando propiedades, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} A + A \cdot X & = & B \\ A \cdot X & = & B - A \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X & = & A^{-1} \cdot (B - A) \\ I \cdot X & = & A^{-1}(B - A) \\ X & = & A^{-1}(B - A). \end{array}$$

Así, la matriz que buscamos es $X = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Finalmente, debemos resolver

$$2 \cdot X + A \cdot X = I$$

Observemos que $2 \cdot X + A \cdot X = (2I + A) \cdot X$, usando la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 2 \cdot X + A \cdot X &= I \\ (2I + A) \cdot X &= I. \end{aligned}$$

Para encontrar la matriz X, es necesario ver si $C := 2I + A$ es inversible, en cuyo caso necesitamos la inversa. Es tarea de los estudiantes probar que esa matriz es inversible y que su inversa es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot X + A \cdot X &= I \\ (2I + A) \cdot X &= I \\ C \cdot X &= I \\ (C^{-1} \cdot C) \cdot X &= C^{-1} \cdot I \\ I \cdot X &= C^{-1} \cdot I \\ X &= C^{-1}. \end{aligned}$$

La última afirmación sale de que I es el neutro del producto de matrices de tamaño 2×2.

3.4.2. Guía de problemas

Estos ejercicios se refieren a ecuaciones matriciales.

Ejercicio 3.4.1. *Sea* $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Determinar una solución no trivial para el sistema homogéneo $(-4I - A)X = 0$.

b) Hallar una solución no trivial del sistema homogéneo $(2I + A)X = 0$.

c) Calcular la inversa de A *si es posible.*

Ejercicio 3.4.2. *Sean* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcular la matriz X *para cada uno de los siguientes casos:*

a) $AX = B$.

b) $A + AX = B$.

c) $2X + AX = I$.

3.5. Ejercicios varios

Esta serie de ejercicios permiten repasar los conceptos vistos en el capítulo.

Ejercicio 3.5.1. *En la siguiente tabla tenemos todos los medalleros de los Juegos Olímpicos correspondientes a 5 países entre los años* 2004 *y* 2008.

Medallas 2004	*Oro*	*Plata*	*Bronce*
China	*32*	*17*	*14*
EEUU	*36*	*39*	*27*
Rusia	*27*	*27*	*38*
Brasil	*5*	*2*	*3*
Colombia	*0*	*0*	*2*

Medallas 2008	*Oro*	*Plata*	*Bronce*
China	*51*	*21*	*28*
EEUU	*36*	*38*	*36*
Rusia	*23*	*21*	*28*
Brasil	*3*	*4*	*8*
Colombia	*0*	*1*	*1*

1. *Escribir la información en dos matrices. ¿Qué tamaño tienen? ¿Qué indica cada fila y cada columna?*
2. *Escribir en una matriz la información del total de medallas recibidas en los años* 2004 *y* 2008 *por cada uno de los países indicados. ¿Qué operación matricial hay que hacer? ¿Qué país recibió más medallas de oro? ¿Y menos medallas de oro?*
3. *Se sabe que, en los Juegos Olímpicos de* 2008*, los deportistas de la China, los EE.UU., Rusia, el Brasil y Colombia recibieron cierta cantidad de dinero para cubrir algunos gastos, por parte de las marcas patrocinadoras. Se sabe también*

que, para los Juegos Olímpicos de 2012, esas mismas marcas incrementaron en el 30 % los aportes para los jugadores de los países mencionados.
Sea A la matriz que representa la cantidad recibida en dólares por los participantes de los 5 países mencionados en los Juegos Olímpicos 2008.

$$A := \begin{pmatrix} 50.000 \\ 30.000 \\ 20.000 \\ 25.000 \\ 10.000 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es la matriz que representa la cantidad total de dinero que recibió cada país en los Juegos Olímpicos de 2012*?*

4. *Se sabe que, en los Juegos Olímpicos de* 2008*, cada participante ganador de cualquiera de las medallas se llevaba dinero según la medalla recibida. La siguiente matriz representa la cantidad de dinero en euros por tipo de medalla:*

$$B := \begin{pmatrix} 90.000 \\ 45.000 \\ 35.000 \end{pmatrix}.$$

¿Cómo se puede determinar el total de dinero recibido por los deportistas ganadores de la China, los EE.UU., Rusia, el Brasil y Colombia?

5. *Sabiendo la cantidad y el tipo de medalla que ganó cada delegación, en los juegos Olímpicos* 2008*, y la cantidad de dinero total en euros que se llevaron los ganadores de los países mencionados. ¿Se podría hallar el dinero que recibió cada jugador por ganar una medalla de oro, plata o bronce, a partir de la información suministrada?*
En otras palabras sabiendo la matriz que relaciona cantidad y tipo de medalla recibida por cada país y la matriz C, que asocia la cantidad de dinero recibida por los ganadores de cada país, es decir

$$C := \begin{pmatrix} 6.235.000 \\ 5.850.000 \\ 3.715.000 \\ 650.000 \\ 70.000 \end{pmatrix}.$$

- *Plantear el problema a partir de un sistema de ecuaciones lineales, indicando claramente cuáles son la incógnitas del problema.*
- *Contestar la pregunta, encontrando una solución al sistema planteado.*

Este ejercicio es una adaptación del ejercicio que se encuentra en Guerra González (2012).

Ejercicio 3.5.2. *Sea* $B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$. *¿Para qué valores de k la matriz B tiene inversa?*

Ejercicio 3.5.3. *Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar las respuestas:*

a) *Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.*

b) *Si se puede efectuar el producto A^2, entonces A es cuadrada.*

Ejercicio 3.5.4. *Hallar a, b para que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique que $A^2 = A$.*

Resolución de algunos problemas

En el punto 1 del el ejercicio 3.5.1 hay dos matrices: la primera, M_1, corresponde a la cantidad de medallas de oro, plata y bronce que ganó cada uno de los 5 países en las olimpíadas 2004, y la segunda, M_2, a la cantidad de medallas de oro, plata y bronce que ganó cada uno en las Olimpiadas 2008.

$$M_1 := \begin{pmatrix} 32 & 17 & 14 \\ 36 & 39 & 27 \\ 27 & 27 & 38 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El total de medallas correspondientes a los 5 países entre las Olimpíadas 2004 y 2008 es:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 83 & 38 & 42 \\ 72 & 77 & 63 \\ 50 & 48 & 66 \\ 8 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El país que recibió menos medallas en los años 2004 y 2008 fue Colombia. Para contestar el ítem 3, la cantidad de dinero total que recibió cada país en los Juegos Olímpicos 2012, tenemos que realizar la siguiente operación matricial:

$$A + 0.3 \cdot A = 1.3 \cdot A = \begin{pmatrix} 65.000 \\ 39.000 \\ 26.000 \\ 32.500 \\ 13.000 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, se puede saber el dinero que recibirían los jugadores de Colombia en los Juegos Olímpicos 2012, que corresponde a unos 13000 euros.

Para determinar el total de dinero recibido por los deportistas ganadores de la China, los EE.UU., Rusia, el Brasil y Colombia, hay que multiplicar las matrices M_2 y B:

$$M_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 6.515.000 \\ 6.210.000 \\ 3.995.000 \\ 730.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}.$$

Por último, se quiere saber cuánto dinero recibieron los atletas de cada país por ganar una medalla de oro, una de plata y una de bronce, sabiendo el número y el tipo de medalla por cada uno de los países, y la cantidad total de dinero recibida por los ganadores. Para ello, planteamos la siguiente ecuación matricial: $M_2 \cdot X = C$, donde $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (con x la cantidad de dinero pagado por ganar una medalla de oro, y representa la cantidad de dinero por ganar una medalla de plata y z indica la cantidad de dinero por ganar una medalla de bronce).

Esto es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 51x + 21y + 28z = 6.235.000 \\ 36x + 38y + 36z = 5.850.000 \\ 23x + 21y + 28z = 3.715.000 \\ 3x + 4y + 8z = 650.000 \\ y + z = 70.000 \end{cases}$$

Observemos que es un sistema de cinco ecuaciones lineales con tres incógnitas. Usando Geogebra, la solución es $(90.000, 45.000, 25.000)$.

En el contexto de la situación propuesta, eso significa que, por una medalla de oro, el jugador recibió 90.000 euros; por una medalla de plata, recibió 45.000 euros y, por la de bronce, 25.000 euros.

En el ejercicio 3.5.3, debemos decidir si ciertas afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar esas respuestas.

La primera afirmación, "Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$", es falsa. En efecto, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, observamos que ninguna de las dos son nulas, pero el producto matricial de ellas sí es nulo.

La afirmación "Si se puede efectuar el producto A^2 entonces A es cuadrada" es verdadera ya que, para poder efectuar las operaciones $A \cdot A$, necesitamos que las filas de la primera matriz coincidan con las columnas de la segunda, pero como se trata de la misma matriz, entonces A resulta una matriz cuadrada.

Por último, resolvemos el ejercicio 3.5.4. En el primer ítem se pide encontrar valores a, b tal que $A^2 = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$. Observemos que es equivalente a encontrar a, b tal que

$$\begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Por igualdad de matrices, tenemos que $a = 2$ y $b = -1$.

CAPÍTULO 4

Determinantes

Este capítulo presenta la noción de determinantes. Los ejercicios tienen como objetivo mostrar la importancia de este concepto, que permite decidir, por ejemplo, si una matriz cuadrada tiene inversa o no, o si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única o no.

4.1. Definición del determinante de una matriz

El siguiente problema introduce el concepto de determinante de una matriz cuadrada y muestra la importancia de este concepto a la hora de decidir si una matriz es inversible o no.

4.1.1. Problema modelo

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   - ¿Qué condiciones tienen que cumplir $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución única?
   - Proponer una matriz que haga que el sistema tenga solución única y otra que haga que el sistema no tenga solución.

2. Decidir si cada una de las siguientes matrices es inversible:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},$$

   ¿Cuánto vale el determinante de cada una de las matrices dadas? Encontrar una relación entre el determinante y la inversa de una matriz.

3. Usando el desarrollo por cofactores, calcular el determinante de la siguiente matriz
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
desarrollándola por la primera fila y la tercera columna. ¿El cálculo del determinante depende de la elección de la fila o de la columna?
4. ¿Cuánto vale el determinante de
$$A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}?$$
Conjeturar una propiedad sobre la base del cálculo hallado.

Resolución del problema modelo

En el punto 1 hay que encontrar condiciones sobre a, b, c, d para que el sistema tenga solución única. Anteriormente se vio que un sistema tiene solución única si la matriz de coeficientes es inversible. Nos preguntamos, entonces: ¿qué condiciones necesitamos pedir para los valores de a, b, c, d para que esa matriz sea inversible?

Calculamos con Geogebra la inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La inversa es
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$
En este punto, vemos que, para que la matriz A sea inversible, $ad - bc \neq 0$.

Concluimos así que el sistema tiene solución si y solo si $ad - bc \neq 0$.

Por ejemplo, si la matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces el sistema tiene solución única; mientras que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, el sistema no tiene solución única.

Definimos el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como el número
$$\det(A) = ad - bc.$$
La siguiente propiedad relaciona el determinante de una matriz con la inversa.

Proposición 4.1.1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *A es inversible si y solo si* $\det(A) \neq 0$.

Así, para el punto 2, $\det(A) = -2$ mientras que $\det(B) = 0$.

Para la matriz A, tenemos lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Tomamos como pivote el número 3 de la fila 1 y hacemos la operación elemental $5F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Luego, tomamos como pivote el número 2 de la fila 2 y hacemos la operación elemental $2F_2 - F_1 \rightarrow F_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Por último, hacemos las operaciones elementales $\frac{F_1}{-3} \rightarrow F_1$ y $\frac{F_2}{2} \rightarrow F_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right).$$

Así, concluimos que A es equivalente a la identidad, por lo que es inversible. Observemos que la matriz A verifica que $\det(A) \neq 0$.

A continuación debemos calcular la inversa de B. Al intentarlo, vemos que no es equivalente a la identidad, por lo que no tiene inversa. Entonces, vemos que B no es inversible y $\det(B) = 0$.

En el punto 3, debemos calcular el determinante de A. Para ello se usa la definición por cofactores, también llamada el método de Laplace.

Desarrollamos por la primera fila. El determinante de A es:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}),$$

donde $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$ y $a_{13} = 3$ y donde $\det(A_{ij})$ es el determinante de la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j.

Por lo tanto, $\det(A) = \det(A_{11}) - 2\det(A_{12}) + 3\det(A_{13})$. Como $\det(A_{11}) = 2$, $\det(A_{12}) = 4$ y $\det(A_{13}) = 1$, tenemos que

$$\det(A) = 2 - 8 + 3 = -3.$$

Desarrollamos la tercera columna:

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+3}\cdot 3\cdot \det(A_{13}) + (-1)^{2+3}\cdot 4\cdot \det(A_{23}) + \\ &\quad (-1)^{3+3}\cdot 2\cdot \det(A_{33}) = 3-8+2=-3.\end{aligned}$$

Según lo trabajado, es posible decir que el cálculo del determinante mediante el desarrollo por cofactores no depende de la elección por filas o por columnas.

Por último, calculamos el determinante de la matriz del punto 4. Desarrollamos por la última fila. El determinante de A es:

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot \det(A_{41}) + (-1)^{4+2}\cdot 0\cdot \det(A_{42}) + \\ &\quad (-1)^{4+3}\cdot 0\cdot \det(A_{43}) + (-1)^{4+4}\cdot (-2)\cdot \det(A_{44}).\end{aligned}$$

Observando que en la fila 4 de la matriz A hay tres ceros, se sigue que:

$$\det(A) = (-1)^{8}\cdot(-2)\cdot\det(A_{44}) = (-2)\cdot\det(A_{44}), \tag{4.1}$$

donde $B = A_{44} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

La definición del determinante de una matriz cuadrada que usamos es recursiva, por lo que, para calcular el determinante de la matriz A, tenemos que calcular el determinante de la matriz B. Dicho de otro modo, pasamos de calcular el determinante de una matriz de tamaño 4×4 a calcular el determinante de una matriz de tamaño 3×3. Nuevamente, tomamos la tercera fila, porque tiene muchos ceros:

$$\det(B) = (-1)^{3+3}\cdot 4\cdot\det(B_{33}), \tag{4.2}$$

donde

$$B_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, $\det(B_{33}) = 2\cdot 1$,entonces por (4.1) y (4.2) tenemos que $\det(A) = (-2)\cdot 4\cdot 2\cdot 1$. Observemos que corresponde a multiplicar todos los elementos de la diagonal.

4.1.2. Guía de problemas

El siguiente grupo de ejercicios trabaja la definición del determinante de una matriz cuadrada.

Ejercicio 4.1.2. *Sean las siguientes matrices cuadradas de* 2×2*:*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

a) *Calcular el determinante de cada matriz.*

b) *Hallar la inversa de las matrices dadas, en caso de que existan.*

c) *Dada una matriz cuadrada de 2×2, ¿cuándo tiene inversa?*

d) *Realizar una operación elemental por fila a la matriz A. Llamar A_1 a esa matriz equivalente. Calcular el determinante de la matriz A_1. ¿A qué conclusión se llega?*

Ejercicio 4.1.3. *Demostrar que si a, b son números reales, entonces las raíces de la ecuación $\det(A) = 0$, donde $A := \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{pmatrix}$ son números reales.*

Ejercicio 4.1.4. *Sean las siguientes matrices:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *Utilizando el desarrollo por cofactores en la primera fila, calcular el determinante de las matrices A, B y C.*

b) *Utilizando el desarrollo por cofactores en la segunda columna, calcular el determinante de las matrices del ítem a.*

c) *Calcular el determinante de las matrices D, E y F por el desarrollo de cofactores, eligiendo la fila o columna que requiera el menor número de cálculos.*

d) *Averiguar en internet cómo se calcula el determinante de una matriz de tamaño 3×3 por el método de Sarrus. Calcular el determinante de las matrices cuadradas de 3×3 por ese método.*

e) *Realizar dos operaciones elementales por filas a la matriz B. Llamar B_1 a esa matriz. Calcular el determinante de la matriz B_1. ¿Qué se puede concluir?*

4.1.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 4.1.2 ítem d), se pide realizar una operación elemental en A, por ejemplo, $F_1 + F_2$ y la reemplazamos en F_2. Al hacer esto, transformamos la matriz A en $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Así, $\det(A) = 3$, mientras que $\det(A_1) = 6-3 = 3$. En este caso, los determinantes coinciden.

En cambio, si hacemos $F_1 + 2F_2$ y lo reemplazamos en la F_2, transformamos la matriz A en $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. En este ejemplo: $\det(A_1) = 10 - 4 = 6 = 2\det(A)$.

Por último, en el ejercicio 4.1.3, se pide hacer una demostración matemática: probar que si a, b son números reales, entonces las raíces de $\det(A) = 0$ son números reales. Para probar esto, calculamos el determinante de A.

$\det(A) = (a-x)^2 - b^2$, entonces, si queremos que $\det(A) = 0$, tenemos que pedir que $(a-x)^2 - b^2 = 0$; que equivale a pedir que

$$(a - x - b)(a - x + b) = 0.$$

De esta manera, $a - x - b = 0$ o $a - x + b = 0$, por lo que $x = a - b$ o $x = a + b$ son números reales; ya que a, b son números reales.

4.2. Propiedades del determinante

El objetivo de este problema modelo es aplicar algunas propiedades conocidas a partir de la definición de la función determinante que se ve en la materia.

4.2.1. Problema modelo

1. Sabiendo que $\det(A) = 7$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, indicar cuánto vale el determinante de cada una de las siguientes matrices:

   a) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

   b) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

   c) $\det\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix}$.

   d) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

2. Sean A, B matrices de 4×4 tal que $\det(A) = -1$ y $\det(B) = 2$. Calcular cada uno de los siguientes determinantes:

   a) $\det(AB)$.
   b) $\det(A^T A)$.
   c) $\det(B^5)$.
   d) $\det(B^{-1}AB)$.
   e) $\det(2A)$.

3. a) Encontrar dos matrices que tengan determinante 2.
   b) Encontrar dos matrices A, B tales que $\det(A) \cdot \det(B) = 1$.

Resolución del problema modelo

Para resolver el punto 1 a), se usa la siguiente propiedad:

Proposición 4.2.1. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se obtiene de A multiplicando una fila por un número k distinto de cero, entonces* $\det(B) = k \det(A)$.

Así, $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 3 \det(A) = 3 \cdot 7 = 21.$

Para el ítem b), necesitamos la siguiente propiedad:

Proposición 4.2.2. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se obtiene intercambiando dos filas, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Entonces, $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -\det(A) = -7$, ya que en este caso intercambiamos las filas 2 y 3 de A.

Para el ítem c), usamos la siguiente propiedad:

Proposición 4.2.3. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se forma reemplazando cualquier fila de A por la suma de esa fila y k veces otra fila, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

En este caso, la matriz B es $B = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix}$. Observemos que esta matriz se obtiene de A usando dos veces la propiedad anterior. Más precisamente, si usamos la operación elemental $F_1 + F_2 \to F_2$:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, usando la operación elemental $F_2 + F_3 \to F_3$:

$$\det\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \det(B).$$

Por las cuentas anteriores: $\det(A) = \det(B)$.

Para calcular el determinante de la matriz del ítem d), usamos la siguiente propiedad:

Proposición 4.2.4. *El determinante es una función lineal en cada fila, alternada y el determinante de la identidad es 1. Más precisamente,*

a)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha b_{11} & a_{12}+\alpha b_{12} & a_{13}+\alpha b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \alpha \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

b) Si A tiene dos filas adyacentes iguales, su determinante es cero.

c) El determinante de la matriz identidad es 1.

Usamos los dos primeros ítems de la propiedad anterior:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= 2\det(A) + 0 = 2 \cdot 7 = 14.$$

Resolvemos el punto 2 del problema modelo. Para ello, necesitamos esta propiedad:

Teorema 4.2.5. *Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. Entonces,*

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

b) $\det(A) = \det(A^T)$.

c) Si A es inversible, entonces $\det(A) \neq 0$ *y* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Así por el Teorema 4.2.5 a):

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = (-1) \cdot 2 = -2.$$

Por los Teoremas 4.2.5 a) y b):

$$\det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = (-1)^2 = 1.$$

Por el mismo teorema, ítems a) y b):

$$\det(B^5) = (\det(B))^5 = 2^5 = 32.$$

Por el ítem a) de este teorema:

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B)^{-1} \det(A) \det(B).$$

Como $\det(B) = 2$ se tiene que B es inversible, así por el Teorema 4.2.5 c), $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{2}$. Por lo que concluimos que

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1}) \det(A) \det(B) = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 = -1.$$

Por último, por la proposición 4.2.1:

$$\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16 \det(A) = 16 \cdot (-1) = -16.$$

Es una actividad de los estudiantes resolver el punto 3.

4.2.2. Guía de problemas

Se repasan aquí algunas propiedades del determinante.

Ejercicio 4.2.6. *Sean las matrices A y B del ejercicio 4.1.4.*

a) *Calcular la matriz producto AB y calcular su determinante. Usando los cálculos de los $\det(A)$ y $\det(B)$, ¿Qué relación encuentras entre $\det(AB)$ con los determinantes $\det(A)$ y $\det(B)$?*

b) *Calcular la matriz kA donde k es un número real y calcular el determinante de kA. ¿Se puede concluir que $\det(kA) = k\det(A)$?*

c) *Calcular la matriz $A + B$ y calcular su determinante. ¿Se puede concluir que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?*

d) *¿Es posible calcular la inversa de la matriz A? ¿Por qué? Si es posible calcular A^{-1}, ¿vale la siguiente igualdad $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$?*

Ejercicio 4.2.7. *Dado*

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5,$$

calcular los siguientes determinantes:

$$\det\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a+c & b & f \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.2.8. *Sabiendo que las matrices cuadradas A y B de tamaño $n \times n$ cumplen que* $\det(A) = 4$ *y* $\det(B) = -3$, *calcular:*

a) $\det(AB)$.

b) $\det(A)^{-1}$.

c) $\det(7A)$.

d) $\det(A^{10})$.

Ejercicio 4.2.9. *Sean* $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Demostrar que*

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B) \textit{ si y solo si } a + d = 0.$$

4.2.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 4.2.8, ítem a), tenemos

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 4 \cdot (-3) = -12.$$

En el ítem b),

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{4}.$$

En el ítem c),

$$\det(7A) = 7^n \det(A) = 7^n \cdot 4.$$

En el ítem d),

$$\det(A^{10}) = (\det(A))^{10} = 4^{10}.$$

El ejercicio 4.2.9 permite realizar una demostración matemática sencilla. Es necesario prestar atención a que la afirmación tiene un “si y solo si”.

Empezamos probando que si $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$, entonces $a + d = 0$. En efecto, por un lado,

$$\det(A+B) = (1+a)(1+d) - cb = 1 + d + a + ad - cb.$$

Por otro,

$$\det(A) + \det(B) = 1 + ad - cb.$$

Entonces, para que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$, tenemos que pedir que $a + d = 0$.

Luego, hay que probar que si $a + d = 0$ entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. $\det(A+B) = 1+d+a+ad-cb$. Como $a+d = 0$, entonces $\det(A+B) = 1+ad-cb = \det(A) + \det(B)$.

4.3. Aplicaciones del determinante

Con el siguiente problema modelo se busca relacionar el determinante con la existencia de solución única, o no, de sistemas de ecuaciones en los que la cantidad de incógnitas coincide con la cantidad de ecuaciones.

4.3.1. Problema modelo

1. Averiguar en internet cómo se calcula la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el que la cantidad de ecuaciones coincide con la cantidad de incógnitas, usando el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes.
2. ¿Cómo se llama el método para calcular soluciones de sistemas con el dato del determinante de la matriz de coeficientes? ¿Por qué se pide que el determinante de dicha matriz sea no nulo?
3. Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, usando la Regla de Cramer:
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$$
4. Sea A una matriz de 4×4 tal que $\det(A) = 2$.
   a) Describir el conjunto solución de $AX = 0$.
   b) Proporcionar una expresión para la solución
   $$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
   c) ¿El sistema $AX = B$ puede tener más de una solución? ¿Por qué?
   d) Si C es otra matriz tal que $\det(AC) = 2$, ¿entonces la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $CAX = 0$ es $X = 0$?

5. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S := \begin{cases} x & + & ay & - & z = & a \\ ax & + & y & + & z = & 0 \\ x & + & y & + & az = & a^2 \end{cases}$$

a) A partir del concepto de determinante y usando herramientas de Geogebra, discutir el tipo de solución del sistema de ecuaciones lineales S de acuerdo con los distintos valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales para el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resolver el sistema de ecuaciones lineales S para $a = 3$.

Resolución del problema modelo

Un método para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones se conoce como la Regla de Cramer.

Teorema 4.3.1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$AX = B,$$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times 1$, si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única, que es $X = (x_1 \dots, x_n)$, donde

$$x_i = \frac{\det(A_i(B))}{\det(A)},$$

donde $A_i(B)$ es la matriz que se forma de A reemplazando la columna i de A por B.

Este enunciado pide que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales sea distinto de cero. Esta hipótesis es necesaria para que la solución del sistema sea única.

Calculemos la solución del sistema de ecuaciones lineales del punto 3 mediante este método. Para ello, es necesario calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando el comando Determinante(A) en la Vista Cas de Geogebra, tenemos que $\det(A) = 29$. Por lo tanto, el sistema tiene solución única, que es (x, y, z), donde

$$x = \frac{\det(A_1)}{29}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{29}, \quad z = \frac{\det(A_3)}{29}$$

con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0$. Por lo tanto, este sistema homogéneo tiene solución $(0, 0, 0)$.

En el punto 4 del problema modelo, tenemos una matriz de orden 4 tal que $\det(A) = 2$.

Como el determinante de la matriz A es distinto de cero, A es inversible. Así, concluimos que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ tiene solución única, es decir, la solución es $X = 0$. Más aún, cualquier sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, para cualquier B de tamaño 4×1, tiene solución única.

Así, si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, tiene solución única. En efecto, como A es inversible, existe A^{-1} tal que $A^{-1} \cdot A = I$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (A^{-1} \cdot A)X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B, \end{aligned}$$

donde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Así la solución es $X = A^{-1}B$.

Finalmente, como C es una matriz de tamaño 4×4 tal que $\det(AC) = 2$, por el Teorema 4.2.5 tenemos que $\det(A) \cdot \det(C) = 2$. Como $\det(A) = 2$, entonces $\det(C) = 1$. Concluimos que C es inversible. Así, tenemos que existe C^{-1} tal que $C^{-1} \cdot C = I$. Entonces,

$$\begin{aligned} CAX &= 0 \\ (C^{-1} \cdot C)AX &= C^{-1} \cdot 0 \\ I \cdot A \cdot X &= 0 \\ A \cdot X &= 0. \end{aligned}$$

Como A es inversible, por las cuentas anteriores, $X = 0$.

Para finalizar, resolvemos el punto 5 del problema modelo usando la Vista Cas de Geogebra, y obtenemos lo siguiente:

```
A:={{1,a,-1},{a,1,1},{1,1,a}}
Determinante(A)
-a^3+a
```

A partir de este cálculo, observamos que el determinante de la matriz de coeficientes asociado al sistema es $det(A) = -a^3 + a$. En consecuencia, el sistema tiene solución única si $det(A) \neq 0$ o, lo que es lo mismo, que $a(-a^2 + 1) \neq 0$. Por lo tanto, para que el sistema tenga solución única, necesitamos que $a \neq 0$, que $a \neq 1$ y que $a \neq -1$. Falta verificar qué ocurre si $a = 0$, $a = 1$ y $a = -1$.

Para el caso de $a = 0$, el sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Se espera que los estudiantes observen que este sistema tiene infinitas soluciones y la misma es $(z, -z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$.

Para el caso $a = 1$, tenemos que el sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución.

Por último, si $a = -1$, el sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

En este caso, el sistema no tiene solución.

Es tarea de los estudiantes resolver el ítem c), que corresponde al caso en que el sistema tiene solución única.

4.3.2. Guía de problemas

Se trabajan aquí algunas de las aplicaciones con determinantes vistas.

Ejercicio 4.3.2. *Resolver los siguientes sistema de ecuaciones lineales usando la Regla de Cramer:*

a)
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

¿Cómo se puede determinar que tienen solución única sin resolver los sistemas de ecuaciones lineales anteriores y usando la información del determinante de la matriz de coeficientes?

Ejercicio 4.3.3. *Usando Geogebra, determinar todos los valores de k tales que*

$$\det\begin{pmatrix} k+2 & -2 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix} = 0.$$

Ejercicio 4.3.4. *Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Usando Geogebra:

a) Discutir el tipo de solución del sistema de ecuaciones lineales de acuerdo con los valores de k.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales para el caso en que tiene infinitas soluciones.

c) Resolver el sistema para el caso en que $k = 3$.

4.3.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

Para resolver el ejercicio 4.3.3, usamos la Vista Cas de Geogebra.

```
A:={{k+2,-2,3},{2,k-1,2},{0,0,k+4}}
Determinante(A)
k^3+5k^2+6k+8
Factoriza(Determinante(A))
(k+4)(k^2+k+2)
```

Observemos que el determinante de la matriz A es $\det(A) = k^3 + 5k^2 + 6k + 8$. Para que el determinante sea igual a 0, hay que encontrar los valores de k tales que $k^3 + 5k^2 + 6k + 8 = 0$. Para ello, podemos usar, en la Vista Cas de Geogebra, el comando Factoriza(polinomio). Así, tenemos que $\det(A) = k(k^2 + k + 2)$. Por lo tanto, los valores de k para que el determinante sea cero es $k = 0$ o $k^2 + k + 2 = 0$.

Se espera que los estudiantes concluyan que los otros dos valores de k que hacen que el determinante de cero son no reales.

4.4. Ejercicios varios

Los ejercicios que siguen relacionan todos los conceptos vistos en el capítulo referidos al determinante de una matriz cuadrada.

Ejercicio 4.4.1. *Sean las siguientes matrices:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Decidir si son inversibles. En caso afirmativo, hallar el determinante de la matriz inversa.

b) Mediante operaciones elementales por filas, transformar la matriz A en una matriz equivalente escalonada por filas (matriz triangular en este caso). Calcular el determinante de la matriz equivalente. Del cálculo realizado, concluir cuál es el determinante de A.

c) Repetir el proceso anterior con las matrices B y C.

d) Calcular el determinante de la matriz B^6.

e) Calcular el $\det(B^6 A - B^6)$.

f) Sea D una matriz de tamaño 3×3 *inversible tal que* $\det(AD) = 2$*. ¿Es posible calcular* $\det(D^{-1})$*?*

Ejercicio 4.4.2. *Sean A y B matrices cuadradas de* 2×2*, cuyas entradas son números reales. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar. Resolver los cálculos con Geogebra.*

a) Si $B^4 = I$*, entonces* $\det(B) = 1$*.*

b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$*,*

c) Si $\det(A) = 0$*, entonces una fila o columna es cero.*

Ejercicio 4.4.3. *Sean* $A := \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ *y* $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los valores de a para los cuales la matriz A es inversible.

b) Repetir el ítem a para la matriz B.

c) Hallar los valores de a para los cuales se cumpla que $\det(A) = \det(B)$*.*

Ejercicio 4.4.4. *Responder las siguientes preguntas usando Geogebra:*

a) Si $\det(A) = \det(B)$*, ¿entonces* $A = B$*?*

b) Si $\det(A^2) = \det(A)$*, ¿entonces el único valor para el determinante de A es* $\det(A) = 1$*?*

c) Sean A y B dos matrices. ¿Vale siempre que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$*?*

Resolución de algunos ejercicios

Resolvemos el ejercicio 4.4.2. La afirmación a) es falsa. En efecto, tenemos que $\det(B^4) = \det(I) = 1$. Como $\det(B^4) = (\det(B))^4$, entonces $\det(B)^4 = 1$. Como estamos trabajando con matrices cuadradas con números reales, entonces $\det(B) = 1$ o, también, $\det(B) = -1$. ¿Qué pasa si $\det(B)$ es un número complejo? Para contestar la pregunta, repasar el capítulo sobre números complejos.

La afirmación b) es falsa. En efecto, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $\det(A+B) = 1$, en cambio $\det(A) = 1$ y $\det(B) = -1$, entonces $\det(A)+\det(B) = 0$. Es un ejercicio para los estudiantes proponer otros ejemplos.

La afirmación c) es falsa. En efecto, si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $\det(A) = 0$, en cambio, ninguna fila ni columna es de ceros.

Luego, contestemos las preguntas del ejercicio 4.4.4. Si $\det(A) = \det(B)$, entonces no tiene por qué A y B ser matrices iguales.

En efecto, $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$ y $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, pero las matrices son distintas.

Si $\det(A^2) = \det(A)$, entonces, por propiedades de los determinantes, $(\det(A))^2 = \det(A)$. Así, $\det(A)(\det(A) - 1) = 0$, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = 0$. Por lo que $\det(A) = 1$ no es el único valor.

Por último, no siempre vale que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. En efecto, si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y B es una matriz de tamaño $n \times m$, tenemos que AB es una matriz de tamaño $m \times m$ a la que le podemos calcular su determinante; en cambio no podemos calcular los determinantes de las matrices A y B, ya que no siempre son cuadradas.

CAPÍTULO

5

Introducción a los espacios vectoriales

Se verá en el capítulo la noción de espacios vectoriales, de subespacios y algunos de sus elementos más importantes, como la noción de combinación lineal, independencia y base de un espacio vectorial. Veremos estos conceptos a través de diferentes ejemplos que ya aparecieron en capítulos anteriores, como el conjunto de los números complejos, las soluciones de los sistemas lineales homogéneos y las matrices cuadradas.

5.1. Concepto de espacio vectorial y subespacio

La estructura que se estudia en este problema modelo, la de espacio vectorial y subespacio, no es novedosa ya que se presentaron algunos ejemplos en capítulos anteriores. Aquí se desarrolla el concepto, que es uno de los más importantes del Álgebra Lineal.

5.1.1. Problema modelo

1. Investigar acerca de la definición de espacio vectorial.
2. Considerar el conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\},$$

con la suma de complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

y la multiplicación por escalar

$$k \cdot (a + bi) = (k \cdot a) + (k \cdot b)i,$$

con $k \in \mathbb{R}$. A partir de lo investigado, ¿se puede decir que $\mathbb{C}$ con la suma y la multiplicación por escalar forma un espacio vectorial?

3. ¿Es posible que el conjunto de todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con la suma de matrices y la multiplicación por escalar forme un espacio vectorial?
4. Dar un ejemplo de espacio vectorial.
5. Investigar acerca de la definición de subespacios. Proponer un ejemplo.
6. Considerar el conjunto de todas las soluciones del sistema

$$AX = 0,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matriz de incógnitas y $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¿Es $(0, 0)$ solución del sistema? ¿Tiene otras soluciones? ¿Qué describe gráficamente el conjunto de soluciones del sistema? ¿Se puede decir que el conjunto de soluciones forma un subespacio?

7. Sea el sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

¿El vector $(0, 0, 0)$ es solución? ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Se puede decir que el conjunto de soluciones forma un subespacio?

8. Decidir si los siguientes conjuntos forman un subespacio:
   a) S_1 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$.
   b) S_2 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
   c) S_3 el conjunto formado por todos los $(0, y)$ tales que $y \in \mathbb{R}$.
   d) S_4 el conjuunto formado por todos los (x, y) tales que $x + y = 0$.

Resolución del problema modelo

Las siguientes definiciones se refieren a espacio vectorial y a subespacio de un espacio vectorial, respectivamente.

Definición 5.1.1. *Un espacio vectorial real es un conjunto no vacío V de objetos llamados vectores en el que están definidas dos operaciones: la suma, es decir una operación que a cada par $v, w \in V$ se le asigna $v + w \in V$, y una multiplicación por escalar, es decir que a cada $k \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ se le asigna $k \cdot v \in V$, y tal que se verifican los siguientes axiomas:*

a) $v + w = w + v$, *para cada* $v, w \in V$.
b) $v + (w + u) = (v + w) + u$, *para cada* $v, w, u \in V$.
c) *Existe* $0 \in V$ *tal que* $v + 0 = v$, *para cada* $v \in V$.
d) *Para cada* $v \in V$ *existe* $(-v) \in V$ *tal que* $v + (-v) = 0$.
e) $k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w$, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *y cada* $v, w \in V$.
f) $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$, *para cada* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *y cada* $v \in V$.
g) $(k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$, *para cada* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *y cada* $v \in V$.
h) $1 \cdot v = v$ *para cada* $v \in V$.

En todo el capítulo llamaremos al espacio vectorial real V simplemente espacio vectorial V.

Sea V un espacio vectorial; donde se tiene definida la suma

$$v, w \in V \quad \Rightarrow v + w \in V, \tag{5.1}$$

y la multiplicación por escalar

$$k \in \mathbb{R},\ v \in V \quad \Rightarrow k \cdot v \in V. \tag{5.2}$$

Sea S un subconjunto de V tal que la suma (5.1) y la multiplicación por escalar (5.2) está bien definida en S. Así tenemos que S es también un espacio vectorial. Entonces se dice que S es un subespacio del espacio vectorial V. Se puede ver que para que S sea un subespacio de V es suficiente probar las siguientes tres condiciones:

Proposición 5.1.2. *Un subconjunto S de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se verifican las siguientes condiciones:*

a) $0 \in S$.
b) *Si* $v, w \in S$, *entonces* $v + w \in S$.
c) *Si* $v \in S$ *y* $k \in \mathbb{R}$, *entonces* $k \cdot v \in S$.

A partir de lo trabajado en el capítulo de complejos, observamos que $\mathbb{C}$ con la suma y multiplicación escalar forma un espacio vectorial, donde $0 = 0 + 0i$, y los vectores v y w son números complejos, es decir, $v = a + bi$ y $w = c + di$.

También observamos que el conjunto de todas las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con la suma de matrices y la multiplicación escalar

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b \\ k \cdot c & k \cdot d \end{pmatrix}$$

forman un espacio vectorial. Aquí, tenemos que los vectores v, w son las matrices, y $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvemos el punto 6. Como $\det(A) = 0$, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones. Las soluciones del sistema homogéneo son los puntos

$$(x, y) \text{ con } y = \frac{-x}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

Gráficamente, el conjunto de todas las soluciones representa una recta que pasa por el origen de coordenadas, con pendiente negativa. Es una actividad de los estudiantes graficarlo.

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo es $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y) \, : \, y = \frac{-x}{2}, x \in \mathbb{R}\}$. Podemos ver que S forma un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que $(0, 0) \in S$ y, si tomamos $v, w \in S$, entonces $v + w$ y $k \cdot v$ pertenecen también a S. Hay dos maneras de justificar esta afirmación.

Sean v y w dos soluciones del sistema lineal homogéneo que describe a S, es decir:

$$A \cdot v = 0, \quad A \cdot w = 0.$$

Se tiene que $v + w$ también es solución del sistema lineal homogéneto, ya que

$$A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = 0 + 0 = 0.$$

Además, se tiene que $k \cdot v$ también es solución del sistema, ya que

$$A \cdot (k \cdot v) = k \cdot (A \cdot v) = k \cdot 0 = 0.$$

La segunda manera consiste en tomar dos puntos cualesquiera de la recta que describe el conjunto de soluciones de S y observar que la suma de estos dos puntos pertenece a la recta, y un múltiplo escalar de un punto también pertenece a la recta. Más precisamente, dados (x, y) y (x_1, y_1), dos puntos de la recta, tenemos que $(x, y) + (x_1, y_1)$ y $k \cdot (x, y)$ también pertenecen a la recta.

Aquí adelantamos cómo se suman puntos en el plano y cómo se multiplica un punto por un escalar. También podemos introducir la noción de suma de vectores,

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$

y la noción de multiplicación por un escalar,

$$k \cdot (x, y) = (kx, ky).$$

Así, el punto $(x, y) + (x_1, y_1)$ verifica que $y + y_1 = \frac{-x}{2} + \frac{-x_1}{2} = -\frac{x+x_1}{2}$, y el punto $k \cdot (x, y)$ verifica que $ky = k(\frac{-x}{2}) = \frac{-kx}{2}$. De este modo, concluimos que ambos puntos pertenecen a la recta.

Respecto del punto 7, esta es la matriz de coeficientes asociada al sistema homogéneo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 0$, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones. Las soluciones del sistema son los puntos de la forma

$$(x, y, z), \qquad x = y + 2z.$$

Estos puntos representan un plano en el espacio. Para graficar, usamos Geogebra, Vista 3D.

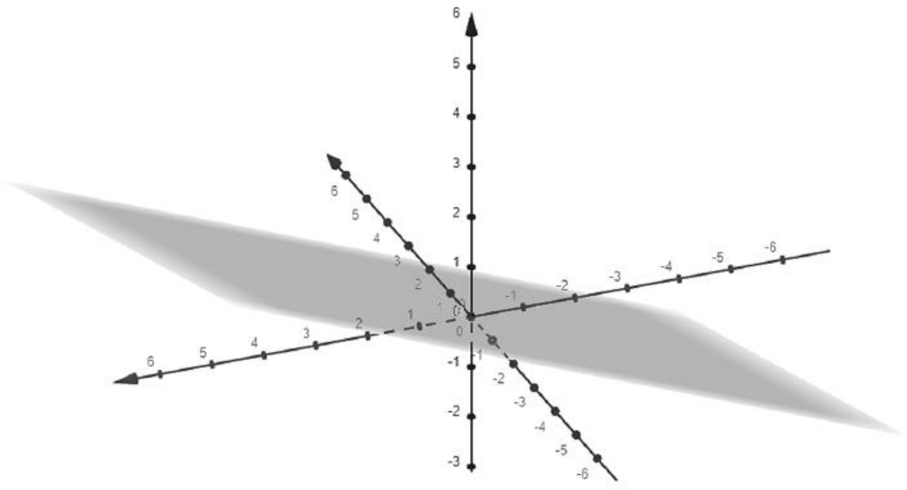


Figura 5.1

Observemos que $(0, 0, 0)$ es solución del sistema y que, dadas dos soluciones cualesquiera del sistema, la suma es una solución, y un múltiplo escalar de una de ellas también es solución del sistema. Más precisamente, sean v, w soluciones del sistema $AX = 0$, entonces

$$A \cdot v = 0, \qquad Aw = 0.$$

De esta manera,

$$A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = 0 + 0 = 0.$$

Análogamente, $k \cdot v$ también es solución del sistema.

$$A \cdot (k \cdot v) = k \cdot (A \cdot v) = k \cdot 0 = 0.$$

Concluimos así que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo del punto 7 forma un subespacio.

En el punto 8, lo primero que se observa es que el plano $\mathbb{R}^2$ forma un espacio vectorial. Más precisamente, definiendo la siguiente suma y multiplicación escalar

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $k \cdot (x_1, y_1) = (k \cdot x_1, k \cdot x_2)$,

tenemos que $\mathbb{R}^2$ forma un espacio vectorial.

Más adelante se verá cómo se suman gráficamente vectores de $\mathbb{R}^2$. El gráfico anterior muestra cómo se suman gráficamente dos vectores:

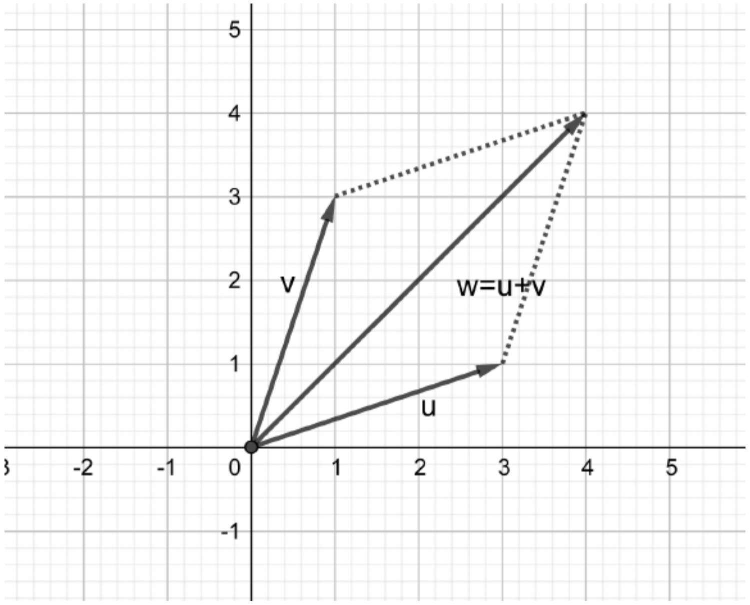


Figura 5.2

Comenzamos graficando el subconjunto S_1 de $\mathbb{R}^2$:

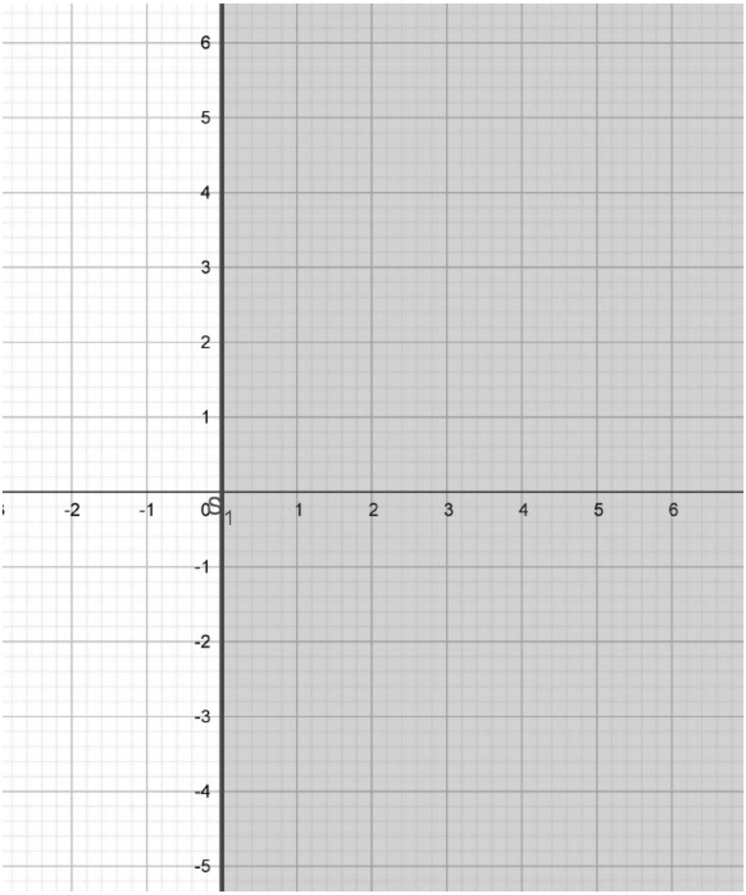


Figura 5.3

Observemos que S_1 es un plano en $\mathbb{R}^2$ que contiene al origen. Si tomamos $v = (1,2) \in S_1$, entonces $(-2) \cdot (1,2) = (-2,-4)$ no es un vector en S_1, ya que la primera coordenada es negativa. Por lo tanto, el producto escalar en S_1 no está bien definido. Concluimos así que S_1 no puede ser un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no se cumple la condición c de la Proposición 5.1.2.

En el siguiente dibujo mostramos el subconjunto S_2 de $\mathbb{R}^2$:

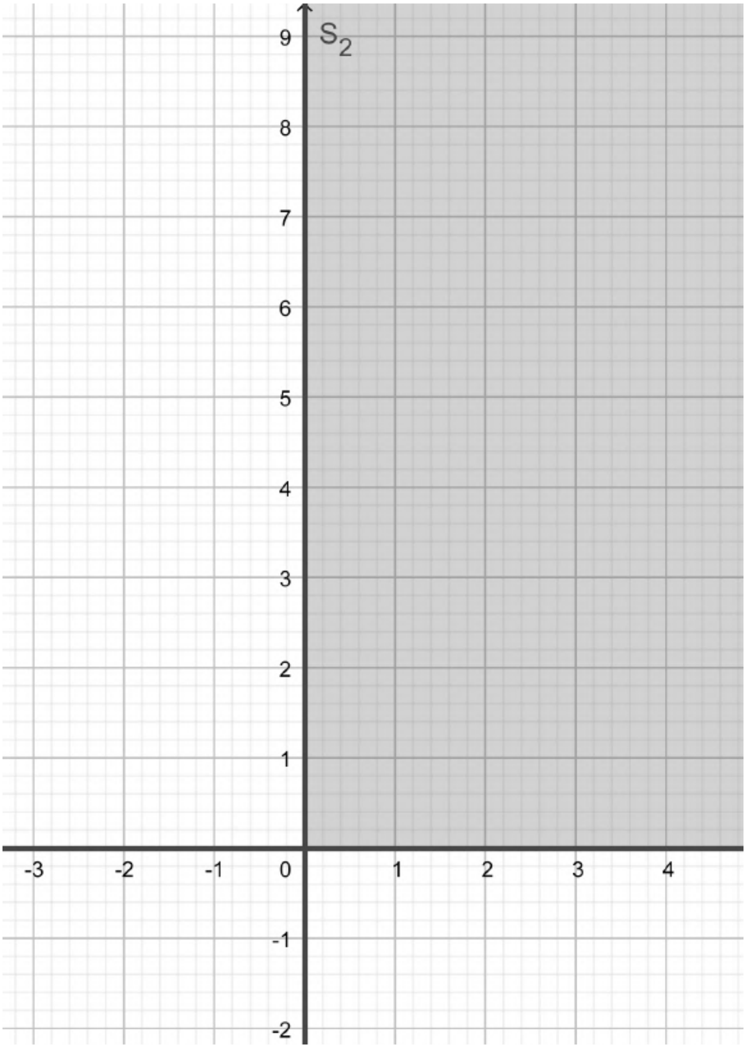


Figura 5.4

Los puntos de S_2 son puntos con ambas coordenadas no negativas, por lo que es un plano dibujado en el primer cuadrante. Observemos que S_2 no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que si tomamos el vector $(1, 2)$ que pertenece a S_2, tenemos que $(-2) \cdot (1, 2) = (-2, -4)$ no está en S_2. Concluimos así que la operación producto escalar no está bien definida en S_2, por lo que no se cumple la condición c de la Proposición 5.1.2.

El siguiente gráfico corresponde al subconjunto S_3 de $\mathbb{R}^2$. Observemos que los puntos de S_3 corresponden a pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x = 0$.

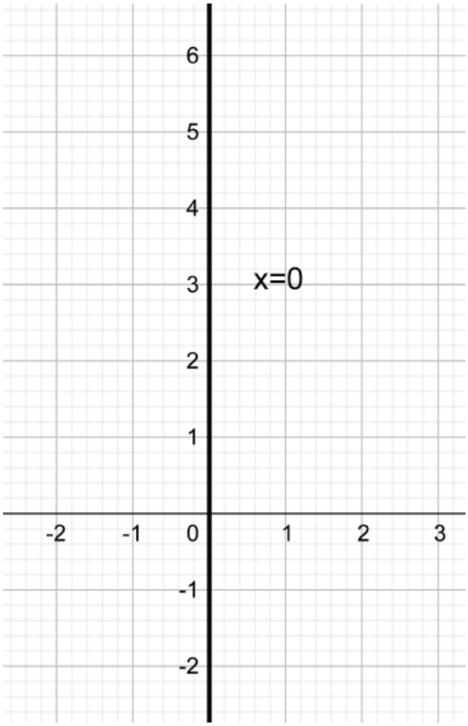


Figura 5.5

En este caso, se cumplen las tres condiciones de la Proposición 5.1.2. En efecto, es fácil ver que $(0, 0) \in S_3$. Por otro lado, si $v, w \in S_3$, entonces $v+w \in S_3$. En efecto, si v y w se escriben como $v = (0, y_1)$ y $w = (0, y_2)$, entonces $v+w = (0, y_1+y_2)$ pertenece a la recta que describe S_3. Por último, si $v \in S_3$ y k es cualquier número real, entonces $k \cdot v$ también pertenece a S_3. En efecto, si $v = (0, y)$, entonces $k \cdot v = (0, k \cdot y)$ que pertenece a S_3. Así, concluimos que S_3 es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, graficamos S_4, que es una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen.

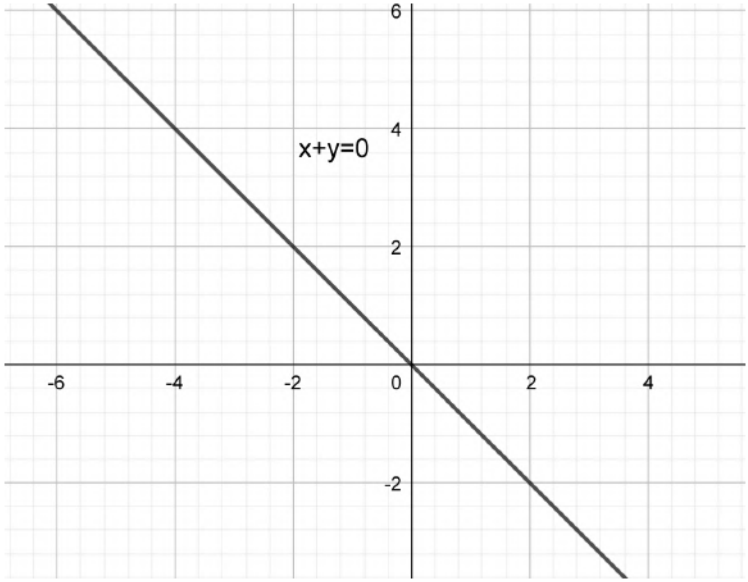


Figura 5.6

Observemos que los puntos de la recta que describe S_4 son de la forma $(x, -x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos demostrar que S_4 es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En efecto, $(0,0) \in S_4$. Por otro lado, si $v, w \in S_4$, entonces $v + w \in S_4$. En efecto, si $v = (x_1, -x_1)$ y $w = (x_2, -x_2)$, entonces $v + w = (x_1 + x_2, -x_1 - x_2)$ está en S_4. Por último, sea $v = (x, -x)$ cualquier vector de S_4 y sea k cualquier número real, entonces $k \cdot v = (k \cdot x, -k \cdot x)$ pertenece a S_4. Por lo que S_4 es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

5.1.2. Guía de problemas

Estos ejercicios trabajan con la noción de espacios vectoriales y subespacios.

Ejercicio 5.1.3. *Decidir si los siguientes conjuntos, junto con las operaciones definidas, son espacios vectoriales:*

a) $\mathbb{R}^2$ *con las operaciones suma y multiplicación escalar usual definida como*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ k \cdot (x_1, y_1) &= (k \cdot x_1, k \cdot y_1)\end{aligned}$$

b) El conjunto formado por los elementos $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ *tales que la suma se define*

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + y_2, y_1 + z_2, z_1 + x_2).$$

Y el producto escalar se define

$$k \cdot (x_1, y_1, z_1) = (kx_1, kx_2, kx_3).$$

c) Las matrices de tamaño 2×2 *con la suma usual de matrices y el producto escalar de matrices, vistos en la práctica de matrices.*

Ejercicio 5.1.4. *El conjunto S está formado por todos los elementos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $xy \geq 0$ *con la suma y multiplicación por escalar de* $\mathbb{R}^2$ *definida en el ejercicio anterior, ítem a).*

a) ¿Cómo son todos los puntos del conjunto S? Realizar un gráfico.

b) ¿Es posible que el punto $(0, 0)$ *pertenezca a S?*

c) Si v *está en S y c es cualquier escalar, ¿*$cv \in S$ *está en S?*

d) Encontrar vectores $v, w \in S$ *tales que* $v + w$ *no están en S.*

Ejercicio 5.1.5. *Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son un subespacio del espacio vectorial indicado:*

a) El conjunto S_1*, formado por todos los elementos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $2x - 5y = 0$.

b) El conjunto S_2*, formado por todos los elementos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $2x - 5y = 5$.

c) El conjuntoS_3*, formado por todos los elementos* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tales que*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

d) S_4 *el conjunto formado por todas las matrices* $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ *tales que* $\det(A) = 0$*, donde* $M_{2,2}(\mathbb{R})$ *son las matrices de tamaño* 2×2 *con coeficientes reales.*

5.1.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 5.1.4 los estudiantes deben realizar una gráfica.

Observemos que el punto $(0,0) \in S$. Si tomamos cualquier $(x, y) \in S$, es decir que verifica que $xy \geq 0$, y c cualquier escalar real, tenemos que (cx, cy) también está en S, ya que $cxcy = c^2xy \geq 0$.

Por otro lado, sean $v = (-1, -3)$ y $w = (2, 2)$ dos vectores en S; tenemos que $v + w = (-1 + 2, -3 + 2) = (1, -1)$ no está en S, ya que $1 \cdot (-1)$ es negativo. Así el subconjunto S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no se verifica la condición b de la Proposición 5.1.2.

En el ejercicio 5.1.5 ítem b), el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio, ya que $(0,0)$ no es un punto de S_2, es decir, no verifica la ecuación lineal $2x - 5y = 5$.

En cambio, el del ítem c) sí forma un subespacio. La justificación es muy parecida a lo trabajado en el problema modelo. En primer lugar, los puntos de S_3 son de la forma $(x_1, -2x_1, x_1)$ con $x_1 \in \mathbb{R}$. Probemos que se verifican las tres condiciones de subespacio de la Proposición 5.1.2. En efecto, $(0,0,0) \in S_3$. Por otro lado, sean (a, b, c) y (d, e, f) dos puntos de S_3, queremos ver que $(a, b, c) + (d, e, f) \in S_3$. Observemos que $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$. Como (a, b, c) y (d, e, f) pertenecen a S_3, tenemos que $a = c$ y $b = -2a$, además, $d = f$ y $e = -2d$. Así, $a + d = c + f$ y $b+e = -2(a+d)$. Concluimos que $(a, b, c)+(d, e, f) = (a+d, -2(a+d), a+d) \in S_3$. De la misma manera, si $(a, b, c) \in S_3$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k \cdot (a, b, c) \in S_3$. En efecto, $k \cdot (a, b, c) = (ka, kb, kc)$. Como $(a, b, c) \in S_3$, entonces $b = -2a$ y $c = a$. Así, tenemos que $k \cdot (a, b, c) = (ka, -2ka, ka) \in S_3$.

5.2. Combinación lineal y sistemas de generadores

Este problema introduce las nociones de combinación lineal y sistemas de generadores.

5.2.1. Problema modelo

1. Una compañía fabrica dos productos. Por cada dólar obtenido del producto B, la compañía gasta $0,45$ dólares en materiales, $0,25$ dólares en mano de obra y $0,15$ dólares en gastos generales. Por cada dólar obtenido del producto C, la compañía gasta $0,40$ dólares en materiales, $0,30$ dólares en mano de obra y $0,15$

dólares en gastos generales.

$$B := \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

B, C representan los costos por dólar de los productos.

a) ¿Qué interpretación económica puede darse al vector $100B$?

b) La compañía desea fabricar x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C. Proporcionar un vector que describa los diversos costos que tendrá por materiales, mano de obra y gastos generales.

2. Una compañía minera tiene dos minas. Las operaciones de un día en la mina 1 producen mineral que contiene 20 toneladas métricas de cobre y 550 kg de plata, mientras que las operaciones de un día en la mina 2 producen mineral que contiene 30 toneladas métricas de cobre y 500 kg de plata. Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 550 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 500 \end{pmatrix}$. v_1 y v_2 representan el rendimiento diario de las minas 1 y 2, respectivamente.

   a) ¿Qué interpretación física se puede dar al vector $5v_1$?

   b) La compañía trabaja la mina 1 x_1 días y la mina 2 x_2 días. Escribir una ecuación cuya solución dé el número de días que debe trabajarse cada mina para producir 150 toneladas de cobre y 2.825 kg de plata.

   c) Resolver la ecuación del ítem b.

3. ¿Es posible que el vector $(7, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ sea una combinación lineal de los vectores $(1, -2, -5)$ y $(2, 5, 6)$?

4. Considerar un conjunto H formado por todas las combinaciones lineales de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$, es decir, el conjunto está formado por todos los vectores de la forma

$$\alpha(1, 4, 7) + \beta(1, 3, 2) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   ¿El vector $(1, 5, -3) \in H$? ¿Y el vector $(1, 0, -13)$?

   El conjunto H se llama el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$.

5. ¿Es posible que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ se escriba como combinación lineal de los vectores $v_1 := (1, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 2)$ y $v_3 := (1, 1, 0)$?

6. ¿Es posible que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generen el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2?
   Recordar que una matriz cuadrada A se dice simétrica si y solo si $A = A^T$.

Resolución del problema modelo

Este problema permite dar una interpretación de la noción de combinación lineal.

En el punto 1,

$$100 \cdot B = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

es un vector que representa los diversos costos de producir 100 dólares de producto B. Este vector indica que si la empresa quiere generar 100 dólares del producto B, tiene un costo de 45 dólares en materiales, 25 dólares en mano de obra y 15 dólares en gastos generales.

El vector que describe los diversos costos que tendrá la empresa por materiales, mano de obra y gastos generales es

$$C_g = x_1 \cdot B + x_2 \cdot C,$$

que corresponde a los costos de obtener x_1 dólares del producto B y de obtener x_2 dólares del producto C. Dicho de otra manera, el vector C_g de costos generales es una combinación lineal de B y C.

En el punto 2, $5v_1$ representa la producción de 5 días de operación de la mina 1.

Si la compañía trabaja x_1 días en la mina 1 y x_2 días en la mina, 2, y queremos saber el número de días necesarios que hay que trabajar en ambas minas para producir 150 toneladas de cobre y 2.825 kg de plata, tenemos que escribir a $\begin{pmatrix} 150 \\ 2.825 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2:

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 2.825 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1(20, 550) + x_2(30, 500)$$

Resolvemos la ecuación lineal: $x_1 = 1,5$ días para la mina 1 y $x_2 = 4$ días para la mina 2.

En el punto 3, buscamos $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(7, 4, -3) = k_1(1, -2, -5) + k_2(2, 5, 6).$$

Esta igualdad equivale a encontrar $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 7 \\ -2k_1 + 5k_2 = 4 \\ -5k_1 + 6k_2 = -3 \end{cases}$$

Mediante cálculos podemos observar que el sistema tiene solución única, por lo que $(7, 4, -3)$ es una combinación lineal de $(1, -2, -5)$ y $(2, 5, 6)$. Más precisamente, $(7, 4, -3) = 3 \cdot (1, -2, -5) + 2 \cdot (2, 5, 6)$.

En el punto 4, debemos averiguar si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1, 5, -3) = \alpha(1, 4, 7) + \beta(1, 3, 2).$$

Esto es equivalente a resolver

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 3\beta = 5 \\ 7\alpha + 2\beta = -3 \end{cases}$$

Mediante cálculos, observamos que el sistema no tiene solución, por lo que no existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 5, -3)$ sea combinación lineal de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$, lo que equivale a que $(1, 5, -3)$ no pertenece a H.

Análogamente, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 7\alpha + 2\beta = -13 \end{cases}$$

Haciendo cálculos llegamos a que la solución del sistema es $(\alpha, \beta) = (-3, 4)$. Esto quiere decir que $(1, 0, -13)$ es combinación lineal de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$, por lo que concluimos que $(1, 0, -13)$ pertenece a H.

En el problema del punto 5 nos preguntan si todo vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b, c) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Este problema es equivalente a resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\alpha + \gamma = b \\ \alpha + 2\beta + \gamma = c \end{cases}$$

Si el sistema tiene solución, entonces cualquier vector $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3. O, lo que es lo mismo, los vectores v_1, v_2, v_3 generan todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Si, en cambio, el sistema no tiene solución, entonces estos vectores no generan todo $\mathbb{R}^3$. Para contestar este punto, no hace falta resolver el sistema, sino decidir si tiene solución o no. Es una tarea para los estudiantes verificar que la matriz de coeficientes asociada al sistema tiene determinante igual a 1, por lo que el sistema tiene solución. Concluimos así que los vectores v_1, v_2 y v_3 forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

En el punto 6 hay varias definiciones para tener en cuenta. La primera tiene que ver con el significado de matrices simétricas:

Definición 5.2.1. *Una matriz cuadrada A se dice simétrica si $A = A^T$ o, lo que es lo mismo, A es de la forma* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Otra definición que necesitamos para resolver este ejercicio es la de sistema de generadores de un espacio vectorial:

Definición 5.2.2. *Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de elementos de V es un sistema de generadores de V o genera V si todo elemento de V se escribe como una combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$.*

En este caso, queremos ver que cualquier matriz simétrica de tamaño 2×2 se escribe como una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad indica que las matrices propuestas generan el conjunto de todas las matrices simétricas. Es una actividad de los estudiantes averiguar si las matrices simétricas $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ forman un espacio vectorial con la suma matricial y la multiplicación de un escalar por una matriz simétrica.

5.2.2. Guía de problemas

Por medio de estos ejercicios se trabajan los conceptos de combinación lineal y sistemas de generadores.

Ejercicio 5.2.3. *Determinar si $b := (2, -1, 6)$ es una combinación lineal de $a_1 := (1, -2.0)$, $a_2 := (0, 1, 2)$ y $a_3 := (5, -6, 8)$.*

Ejercicio 5.2.4. *Dar 3 vectores que pertenezcan al subespacio generado por los vectores* $(7, 1, -6)$ *y* $(-5, 3, 0)$.

Ejercicio 5.2.5. *Determinar si* $w := (8, 2, -9)$ *está en el subespacio generado por* v_1, v_2 *donde* $v_1 := (2, 3, -5)$ *y* $v_2 := (-4, -5, 8)$.

Ejercicio 5.2.6. *Considerar el conjunto*

$$\Pi : (x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Es posible encontrar un punto de Π *que no sea combinación lineal de* $(1, 1, 0)$ *y* $(-1, 0, 1)$*?*

Estudiar la veracidad de la siguiente afirmación: "Un punto $P \in \Pi$ *si y solo si es combinación lineal de los vectores* $(1, 1, 0)$ *y* $(-1, 0, 1)$*."*

Ejercicio 5.2.7. *¿El conjunto de todas las combinaciones lineales de* $(1, 2)$ *determina el mismo conjunto de puntos del plano que determina la ecuación* $y = 2x$*? Justificar la respuesta usando la herramienta gráfica de Geogebra.*

5.2.3. Algunas respuestas a los ejercicios de la guía de problemas

La respuesta al ejercicio 5.2.6 es negativa, ya que los elementos de Π se describen como todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que resultan combinación lineal de $(1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$.

Los estudiantes tienen como tarea realizar los gráficos correspondientes al ejercicio 5.2.7, usando Geogrebra. Aquí lo resolvemos de manera analítica: Un punto (x, y) es combinación lineal de $(1, 2)$ si y solo si $(x, y) = \alpha(1, 2)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Así tenemos que $x = \alpha$ e $y = 2\alpha$; por lo tanto, $y = 2x$.

5.3. Dependencia o independencia lineal y bases de un espacio vectorial

Este problema permite estudiar los conceptos de independencia lineal y bases de un espacio vectorial.

5.3.1. Problema modelo

1. Sean $v_1 := (1,2,3)$, $v_2 := (4,5,6)$, $v_3 := (2,1,0)$ y $0 = (0,0,0)$ cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$.
   a) ¿Es posible que la ecuación $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se pueda escribir como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?
   b) ¿Cuántas soluciones (α, β, γ) tiene el sistema de ecuaciones lineales?
   c) ¿Es posible escribir v_3 como una combinación lineal de v_1 y v_2?
2. Sean $v_1 = (3,0,0)$, $v_2 = (-3,2,3)$ y $v_3 = (6,4,0)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$.
   a) ¿Es posible que la ecuación $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ se pueda escribir como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?
   b) ¿Cuántas soluciones (α, β, γ) tiene el sistema de ecuaciones lineales?
   c) ¿Existen α, β no nulos tales que v_3 se escribe como $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$?
3. Sean $v_1 := (1,2,3)$, $v_2 := (4,5,6)$, $v_3 := (2,1,0)$ y $v_4 = (0,0,2)$ cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determinar si $B_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente. Si no lo es, encontrar una relación de dependencia lineal entre v_1, v_2 y v_3. ¿B_1 es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?
   b) Probar que $B_2 := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿Son linealmente independientes?
   c) ¿Se puede sacar un vector de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para que ese conjunto de tres vectores sea linealmente independiente y que genere todo $\mathbb{R}^3$? Si es así, probar que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de esos tres vectores elegidos.
4. Determinar si los vectores $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (0,1,-1,2)$, $v_3 := (0,2,2,1)$ y $v_4 := (1,0,0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$. En caso de ser posible, hallar la dimensión del espacio vectorial.
5. Encontrar una base de $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : A\boldsymbol{x} = 0\}$ donde $A := \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ y calcular la dimensión.
6. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $(1,0,1,0)$ y $(-1,1,-1,0)$.

Resolución del problema modelo

En el ítem 1 del problema modelo, se pide escribir la ecuación vectorial

$$\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(2,1,0) = (0,0,0)$$

como el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$

Como la matriz de coeficientes tiene determinante 0, el sistema tiene infinitas soluciones. Es una actividad de los estudiantes verificar que las soluciones del sistema son de la forma (α, β, γ) donde $\alpha = 2\gamma$ y $\beta = -\gamma$.

Si tomamos una solución particular, por ejemplo $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $\gamma = 1$, y la reemplazamos en la ecuación vectorial

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0,$$

tenemos que

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0.$$

Esto equivale a decir que v_3 es una combinación lineal de v_1 y v_2. Más precisamente,

$$v_3 = -2v_1 + v_2.$$

De manera análoga, es posible escribir la ecuación vectorial

$$\alpha(3,0,0) + \beta(-3,2,3) + \gamma(6,4,0) = 0$$

como el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} 3\alpha - 3\beta + 6\gamma = 0 \\ 2\beta + 6\gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única, que es $(0,0,0)$. Así, no existen α, β, γ no todos nulos tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. De esta manera, no podemos escribir ningún vector como combinación lineal de los otros.

Resolvemos el punto 3, para el que necesitamos la siguiente definición:

Definición 5.3.1. *Decimos que los vectores $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes de V si la ecuación lineal*

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0,$$

tiene únicamente la solución trivial $(0, \dots, 0)$.

En cambio, decimos que $v_1 \dots v_n \in V$ son linealmente dependientes si existen $x_1, \dots, x_n$ no todos ceros tales que

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0.$$

En el ítem a) hay que determinar si los elementos de B_1 son linealmente independientes. En este sentido, hay que ver que la ecuación vectorial

$$\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (4,5,6) + \gamma \cdot (2,1,0) = 0, \tag{5.3}$$

tiene como única solución a $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$. Esto es equivalente a determinar si el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$

Como la matriz de coeficientes tiene determinante igual a cero, este sistema tiene infinitas soluciones. En este sentido, existen α, β, γ, no todos necesariamente nulos, que verifican la igualdad (5.3). Así, B_1 no es un conjunto linealmente independiente. Más aún, los elementos de B_1 son linealmente dependientes.

Ahora bien, ¿los vectores de B_1 generan a $\mathbb{R}^3$? Para ello, tenemos que ver si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Más precisamente, sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, queremos ver si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (5,4,6) + \gamma \cdot (2,1,0).$$

Esto se traduce en determinar si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 6\beta = z \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes da cero, este sistema o bien no tiene solución o bien tiene infinitas soluciones. Si resolvemos el sistema de ecuaciones lineales, se observa que tiene infinitas soluciones si y solo si $x-2y+z=0$. En efecto, por el método de eliminación, la matriz ampliada equivalente asociada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & |x \\ 0 & 3 & 3 & |2x-y \\ 0 & 0 & 0 & |x-2y+z \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los elementos de B_1 no generan todo $\mathbb{R}^3$, y solo generan los elementos (x,y,z) tales que verifican que $x-2y+z=0$.

A continuación se pregunta si el conjunto $B_2 := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, o sea, si existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z) = \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (5,4,6) + \gamma \cdot (2,1,0) + \epsilon \cdot (0,0,2). \tag{5.4}$$

Esto se traduce en determinar si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 6\beta + 2\epsilon = z \end{cases}$$

Se espera que los estudiantes comprueben que el sistema anterior tiene infinitas soluciones, es decir, que existen infinitos $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in \mathbb{R}$ que verifican que (5.4), por lo que B_2 es un sistema de generadores.

Ahora bien, ¿B_2 es un conjunto linealmente independiente? En este sentido, se pregunta si la única manera de que exista esta combinación lineal

$$\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (5,4,6) + \gamma \cdot (2,1,0) + \epsilon \cdot (0,0,2) = 0, \tag{5.5}$$

es que los escalares $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ sean iguales a cero. Nuevamente, traduciendo esta igualdad en el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + 2\epsilon = 0 \end{cases},$$

observamos que, como la cantidad de ecuaciones es menor que la cantidad de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones, además de la trivial. Así, B_2 no es linealmente independiente.

A modo de conclusión, vemos que B_2 genera todo $\mathbb{R}^3$, pero no es un conjunto linealmente independiente; esto quiere decir que un vector de B_2 es combinación lineal de los otros. Pero si recordamos B_1, que es un subconjunto de B_2, tampoco es un conjunto linealmente independiente, por lo que si tenemos que sacar un vector de B_2 para que ese nuevo subconjunto sea linealmente independiente y genere todo $\mathbb{R}^3$, nos debemos inclinar por sacar alguno de B_1.

Afirmamos que $B_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$ es un conjunto linealmente independiente y genera $\mathbb{R}^3$. En efecto, si tenemos la siguiente combinación lineal nula

$$\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (5,4,6) + \gamma \cdot (0,0,2) = 0,$$

queremos ver que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$. Como la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + 2\gamma = 0 \end{cases},$$

tiene determinante distinto de cero, el sistema tiene solución única. Así, concluimos que $\alpha, \beta, \gamma = 0$. Por lo tanto B_3 es un conjunto linealmente independiente.

Veamos ahora que B_3 es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$. Dado (x, y, z) cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, queremos saber si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (5,4,6) + \gamma \cdot (0,0,2) = (x, y, z). \tag{5.6}$$

Los estudiantes deben demostrar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = x \\ 2\alpha + 5\beta = y \\ 3\alpha + 6\beta + 2\gamma = z \end{cases},$$

tiene como solución $\alpha = -\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}y$, $\beta = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$ y $\gamma = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z$. Estas cuentas no solo indican que B_3 genera $\mathbb{R}^3$, sino que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ se escribe de una manera única como combinación lineal de los elementos de B_3. Esto nos lleva a decir que B_3 es una base de $\mathbb{R}^3$.

Los conjuntos de vectores que además de generar un espacio vectorial resultan ser linealmente independientes caracterizan a dicho espacio, en el sentido en que cada vector del espacio vectorial en cuestión se puede escribir de manera única como combinación lineal de los elementos de dicho conjunto.

Definición 5.3.2. *Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V. B es una base de V si y solo si B genera a V y son linealmente independientes.*

Resolvemos el punto 4. Veamos primero que v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Para ello, hay que saber si la ecuación

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \epsilon v_4 = 0$$

tiene solución trivial. Este problema es equivalente a mostrar que el siguiente sistema homogéneo tiene solución única:

$$\begin{cases} \alpha + \epsilon = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma + \epsilon = 0 \end{cases},$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema tiene solución única y es $(0, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, v_1, v_2, v_3 y v_4 son linealmente independientes. De la misma manera, se puede ver que generan todo $\mathbb{R}^4$. Es tarea de los estudiantes demostrar que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^4$, por lo que la dimensión de dicho espacio vectorial es 4.

En el punto 5 hay que encontrar una base del conjunto

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,:\, A\boldsymbol{x} = 0\},$$

donde $A := \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

Lo primero que se debe probar es que S es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Cada estudiante realizará esa verificación. Este subespacio se llama el *espacio nulo de A*.

Un punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S$ si y solo si $A\boldsymbol{x} = 0$ o, lo que es lo mismo, $\boldsymbol{x}$ verifica la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x} \in S$ si y solo si $\boldsymbol{x}$ es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}. \tag{5.7}$$

La actividad para los estudiantes en este punto es encontrar las soluciones de (5.7) y verificar que el conjunto S se puede escribir de la siguiente manera:

$$S = \{\boldsymbol{x} \in S : \boldsymbol{x} = x_2 \cdot (2,1,0,0,0) + x_5(-2,0,0,1,1),\ \ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} \tag{5.8}$$

En (5.8) se observa fácilmente que $B = \{(2,1,0,0,0),(-2,0,0,1,1)\}$ es un sistema de generadores de S. Para ver que B es, en realidad, una base de S, es necesario saber si es linealmente independiente. Para ello, si tenemos la siguiente combinación lineal nula

$$\alpha \cdot (2,1,0,0,0) + \beta \cdot (-2,0,0,1,1) = 0,$$

hay que ver que $\alpha, \beta = 0$. Esto equivale a demostrar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única:

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \tag{5.9}$$

lo cual es evidente. Así, B es una base del subespacio S. Como la cantidad de elementos de B es 2, la dimensión de S es $\dim(S) = 2$.

Finalmente para el punto 6, buscamos una base de $\mathbb{R}^4$ que contengan a los vectores $v_1 = (1,0,1,0)$ y $v_2 = (-1,1,-1,0)$. Como dimensión de $\mathbb{R}^4$ es cuatro, basta agregar dos vectores linealmente independientes. Por ejemplo, tomamos $v_3 = (0,0,1,0)$ y $v_4 = (0,0,0,1)$. Podemos comprobar facilmente que v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Así tenemos que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.

5.3.2. Guía de problemas

Los siguientes ejercicios se relacionan con independencia lineal, sistemas de generadores, base y dimensión.

Ejercicio 5.3.3. *Sean* $u := (3,2,-4)$, $v := (-6,1,7)$ $w := (0,-5,2)$ *y* $z := (3,7,-5)$.

a) *¿El conjunto* $\{u, w\}$ *es linealmente independiente?*

b) *Determinar si* $\{u, v, w, z\}$ *son linealmente independientes. Si no lo son, dar una combinación lineal entre ellos.*

Ejercicio 5.3.4. *Probar que el conjunto* $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ *es linealmente dependiente.*

Ejercicio 5.3.5. *¿El conjunto* $\left\{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ *es linealmente independiente?*

Ejercicio 5.3.6.

a) *Determinar para qué valores de k se tiene que $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente dependientes, donde $v_1 := (1, -3, 2)$, $v_2 := (-3, 9, -6)$ y $v_3 := (7, -7, k)$*

b) *Determinar el valor de k para el cual $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes, donde $v_1 := (0, 1, -2)$, $v_2 := (-1, 2, k)$ y $v_3 := (k + 2, -2, 0)$.*

Ejercicio 5.3.7. *Determinar si el conjunto $C = \{(0, 3), (2, -3), (0, 2)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. ¿Habrá un subconjunto de C que también genere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$?*

Ejercicio 5.3.8. *¿El conjunto $D = \{(1, -1, 2), (0, 1, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$? Si la respuesta es afirmativa, justificar por qué y, si es negativa, averiguar si existe algún vector de $\mathbb{R}^3$ tal que, si se lo agrega a D, el nuevo subconjunto genera $\mathbb{R}^3$.*

Ejercicio 5.3.9. *Determinar cuáles conjuntos son bases para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, según corresponda:*

a) $\{(5, -2), (10, -3)\}$

b) $\{(0, 1, -2), (5, -7, 4), (6, 3, 5)\}$

c) $\{(1, -6, -7), (3, -4, 7), (-2, 7, 5), (0, 8, 9)\}$

Ejercicio 5.3.10. *Determinar si* $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ *es una base para el conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2.*

Ejercicio 5.3.11. *Determinar una base de $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$, donde*
$A := \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. *Calcular la dimensión de S.*

Ejercicio 5.3.12. *Dar una base de $R = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ y calcular la dimensión de R.*

Ejercicio 5.3.13. *Encontrar una base para $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$.*

Ejercicio 5.3.14. *Decidir si se puede extraer de $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^3$ si*

$$\mathcal{B} := \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1),(-2,1,-4)\}.$$

Ejercicio 5.3.15. *Encontrar una base para $\mathbb{R}^3$ que contenga los vectores* $(1,0,2),(0,1,3)$.

5.3.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

Resolvemos el ejercicio 5.3.3. En el primer ítem, se pregunta si $u = (3,2,-4)$ y $w = (0,-5,2)$ es un conjunto linealmente independiente. Para contestar esta pregunta, necesitamos plantear la siguiente combinación lineal nula

$$\alpha \cdot (3,2,-4) + \beta \cdot (0,-5,2) = 0, \tag{5.10}$$

y ver $\alpha, \beta = 0$. Plantear la combinación lineal (5.10) es equivalente a determinar si el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene, únicamente, la solución trivial:

$$\begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 2\alpha - 5\beta = 0 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

Concluimos así que el conjunto $\{u, w\}$ es linealmente independiente. Los estudiantes demostrarán por su cuenta que la solución del sistema anterior es la trivial.

En el siguiente ítem, debemos averiguar si el nuevo conjunto formado por los vectores $\{u, w, v, z\}$ es linealmente independiente. En este caso, hay que plantear la siguiente combinación lineal nula:

$$\alpha \cdot (3,2,-4) + \beta \cdot (-6,1,7) + \gamma \cdot (0,-5,2) + \epsilon \cdot (3,7,-5) = 0, \tag{5.11}$$

y ver si $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon = 0$. Esto es equivalente a ver si el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solamente la solución trivial.

$$\begin{cases} 3\alpha - 6\beta + 3\epsilon = 0 \\ 2\alpha + \beta - 5\gamma + 7\epsilon = 0 \\ -4\alpha + 7\beta + 2\gamma - 5\epsilon = 0 \end{cases}$$

Concluimos así que el conjunto $\{u, v, w, z\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Una actividad grupal para los estudiantes es argumentar, sin hacer cuentas, que el sistema homogéneo anterior tiene infinitas soluciones además de la trivial.

En el ejercicio 5.3.7 se pide averiguar si C es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$. Para ello, cualquier elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene que ser combinación lineal de $(0, 3)$, $(2, -3)$ y $(0, 2)$. Más precisamente, buscamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(0, 3) + \beta(2, -3) + \gamma(0, 2) = (x, y).$$

Esto equivale a encontrar una solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2\beta = x \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = y \end{cases}$$

$\beta = \frac{x}{2}$ y $\gamma = y + \frac{3}{2}x - 3\alpha$, por lo que, tomando cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos infinitos valores de γ. Esto quiere decir que C es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$.

Si sacamos el último elemento de C, resulta también un sistema de generadores. Es decir, el nuevo conjunto $C_1 = \{(0, 3), (2, -3)\}$ también es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. Un ejercicio en este punto es preguntarse: ¿Si en vez de sacar el vector $(0, 2)$ de C hubiésemos sacado otro, el nuevo conjunto seguía siendo sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$?

En el ejercicio 5.3.10, se debe probar si B es una base para el conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 con coeficientes reales. Empecemos viendo si B es un sistema de generadores.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz cualquiera. Queremos ver si existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto es equivalente a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha + \gamma \\ 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

De la definición de igualdad de matrices, se sigue que queremos encontrar una solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + \gamma = b \\ 2\alpha + \beta = c \\ -\alpha + \beta + \gamma = d \end{cases}$$

Es tarea de los estudiantes probar que este sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, por lo que B no forma un sistema de generadores de las matrices de tamaño

2×2. De esta manera, concluimos entonces que B no es una base de las matrices de tamaño 2×2.

En el ejercicio 5.3.12 debemos encontrar una base de R. Como cualquier punto $(x_1, x_2, x_3) \in R$ cumple que $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, los puntos de R satisfacen la siguiente combinación lineal

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_1 - x_2) = x_1(1, 0, 2) + x_2(0, 1, -1).$$

De esta manera, el conjunto $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ forma un sistema de generadores de R y, además, son linealmente independientes. Por lo que, B es una base de R. Así, $\dim(R) = 2$.

Finalmente, resolvemos el ejercicio 5.3.14. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, si podemos tomar del conjunto B tres vectores linealmente independientes, necesariamente van a formar un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$. Es una tarea de los estudiantes probar que $\{(0, 1, 0), (1, 1, 1), (-2, 1, -4)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

5.4. Ejercicios varios

Este conjunto de ejercicios permite integrar los temas del capítulo sobre espacios vectoriales, relacionando los conceptos vistos.

Ejercicio 5.4.1. *Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo* $A \cdot X = 0$, *donde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Mostrar con Octave que $(0, 0)$ *es solución del sistema homogéneo.*

b) Dar 2 *vectores que sean solución del sistema de ecuaciones y nombrarlos* v *y* w.

c) Probar con Octave que $3v$, $2w$ $3v + 2w$ *y* $v - w$ *son, también, soluciones del sistema de ecuaciones lineales.*

d) ¿Se puede decir que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo es un subespacio? Es decir, ¿el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\}$ *es un subespacio en* $\mathbb{R}^2$*?*

e) Dar el conjunto solución de S.

f) Graficar con Geogebra las ecuaciones lineales del sistema homogéneo. Dar una interpretación geométrica.

Ejercicio 5.4.2. *Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A \cdot X = 0$, donde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Encontrar dos vectores linealmente dependientes que sean solución del sistema.

b) Encontrar tres vectores linealmente dependientes que sean solución del sistema.

c) Encontrar dos vectores linealmente independientes que sean solución del sistema.

d) Encontrar tres vectores linealmente independientes que sea solución del sistema ¿es posible?

e) Dar un conjunto de generadores del conjunto solución del sistema homogéneo que resulte linealmente independiente.

Ejercicio 5.4.3. *Sea* $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

a) Graficar dicho conjunto en Octave o Geogebra. ¿Qué representa geométricamente?

b) Dar dos vectores de S que resulten linealmente dependientes.

c) Dar dos vectores de S que resulten linealmente independientes. ¿Es posible dar tres vectores linealmente independientes? ¿Por qué?

d) Encontrar dos vectores de S de tal manera que cualquier otro resulte una combinación lineal de ellos dos.

e) Encontrar tres vectores de S de tal manera que cualquier otro resulte una combinación lineal de ellos dos.

f) Dar un conjunto de generadores de S que resulten linealmente independientes. ¿Cuál es la dimensión de S?

Ejercicio 5.4.4. *Indicar si el conjunto de las combinaciones lineales del vector* $v = (1, 2)$ *determina los mismos puntos del plano que determina la ecuación* $y = 2x$.

Ejercicio 5.4.5. *Generar 6 números aleatorios* a, b, c, d, m, n *y utilizarlos para resolver el siguiente ejercicio con ayuda de Octave.*

Sea $H := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by - cz = 0\}$.

a) Encontrar una base para H.

b) Escribir el vector $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}(b + bn - c + cm) & n+1 & 1-m & a \end{pmatrix}$ *como combinación lineal de los elementos de la base.*

Ejercicio 5.4.6. *Explicar por qué el conjunto formado por todos los elementos* $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ *tales que* $x + y + z = 1$ *no forma un subespacio de* $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.4.7. *¿Es posible escribir un conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por tres vectores que resulte linealmente independiente?*

Resolución de algunos ejercicios

Resolvemos con Octave y Geogebra el ejercicio 5.4.1. Los estudiantes deben realizar los primeros tres ítems con Octave. Aquí se usa como soluciones del sistema $v = [-4; 1]$ y $w = [-8; 2]$.

Con los cálculos realizados en los ítems anteriores, conjeturamos que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo es un subespacio. Es tarea de los estudiantes demostrarlo.

Para dar el conjunto solución, usamos la función rref en Octave.

```
A=[1,4;2,8]
1  4
2  8
B=[0;0]
0
0
AB=[A B]
1 4 0
2 8 0
rref(AB)
1   4   0
0   0   0
```

Mediante estos cálculos, vemos que S se puede escribir

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + 4y = 0\}.$$

De esta manera, el conjunto de todas las soluciones de S son los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x = -4y$ o, lo que es lo mismo, son los vectores de la forma $y(-4, 1)$ con $y \in \mathbb{R}$.

También se puede usar la opción CAS de Geogebra para resolverlo, con el comando SolucionesC.

```
SolucionesC({x + 4y = 0, 2x + 8y = 0},{x, y})
(-4y y)
```

Graficando con Geogebra las ecuaciones lineales del sistema homogéneo, observamos que son rectas coincidentes, por lo que hay infinitas soluciones. Estas soluciones están en la recta $x + 4y = 0$.

Resolvemos el ejercicio 5.4.2. Con Geogebra se observa que el conjunto de todas las soluciones del sistema $AX = 0$ son los vectores de la forma $(-y, y, 0, w)$ con $y, w \in \mathbb{R}$. De manera equivalente, tenemos que las soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ son los vectores de la forma $y(-1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1)$ con $y, w \in \mathbb{R}$.

```
SolucionesC({x+y=0,z=0,x+y+z=0},{x,y,z,w})
(-y y 0 w)
```

Si queremos encontrar dos vectores linealmente dependientes que sean solución del sistema, basta tomar, por ejemplo, $(-1, 1, 0, 0)$ y una combinación lineal de él. Hay infinitas posibilidades para este ítem: es tarea de los estudiantes proponer otros ejemplos.

En cambio, si se quiere encontrar tres vectores linealmente dependientes, tomamos $v = (-1, 1, 0, 0)$, $w = (0, 0, 0, 1)$ y $u = v + w$. Se puede observar que estos tres vectores son linealmente dependientes. Hay muchos más ejemplos.

Dos vectores linealmente independientes son $(-1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Pero no es posible encontrar tres vectores linealmente independientes. Una tarea para los estudiantse es demostrar que esta afirmación es verdadera. Por último, los vectores $(-1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$, además de ser linealmente independientes, generan el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Por eso, estos vectores forman lo que se llama una base del conjunto de soluciones del sistema estudiado.

Resolvemos ahora el ejercicio 5.4.3. Con Geogebra se observa que S representa un plano en $\mathbb{R}^3$. (Más adelante se trabajará con rectas y planos en el espacio.) Los estudiantes tienen como actividad realizar el gráfico con Geogebra 3D.

Por ahora, observemos que las soluciones en Geogebra son las siguientes:

```
SolucionesC({2x + y - z = 0},{x, y, z})
(-1/2y+1/2z y z)
```

Notemos que es posible escribir este plano también como los puntos en $\mathbb{R}^3$ que verifican que $y(-\frac{1}{2}, 1, 0) + z(\frac{1}{2}, 0, 1)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

A partir de esta escritura y del gráfico, responder los demás ítems del ejercicio propuesto.

Por otro lado, usando Geogebra se ve que las combinaciones lineales del vector $v = (1, 2)$ coinciden con la recta $y = 2x$.

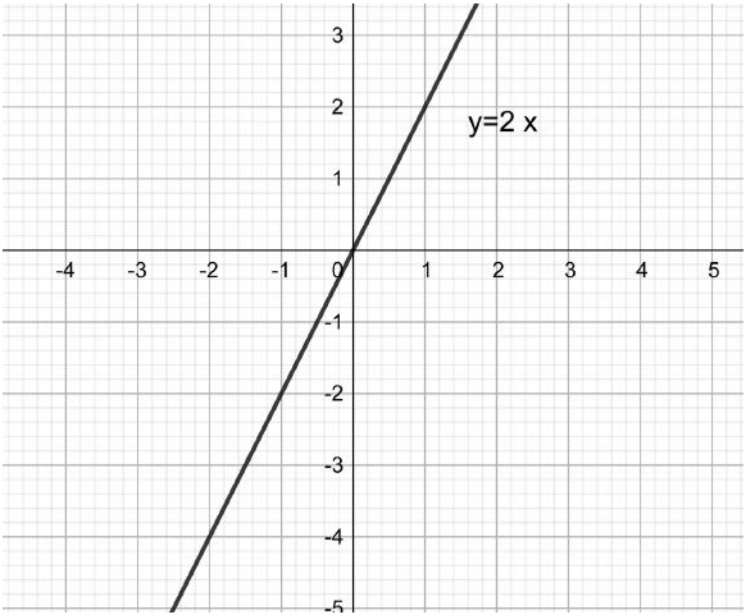


Figura 5.7

Por último resolvemos el ejercicio 5.4.5. Para hallar una base de H se usa Geogebra y así se hallan las soluciones de la ecuación lineal $ax + by - cz = 0$:

```
SolucionesC({a*x+b*y-c*z=0},{x,y,z,w})
(-by+cz)/a y z w)
```

Estos cálculos muestran que todo vector $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ se escribe de manera única como una combinación lineal de los vectores $v_1 := (-\frac{b}{a}, 1, 0, 0)$, $v_2 := (\frac{c}{a}, 0, 1, 0)$ y $v_3 := (0, 0, 0, 1)$ con $a \neq 0$. Concluimos así que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forman una base de H.

En el ítem b), hay que escribir v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Por lo tanto, debemos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = v.$$

De manera equivalente, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & \frac{c}{a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}(b + bn - c + cn) \\ n+1 \\ 1-m \\ a \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Generando aleatoriamente valores para a, b, c, m, n con la función rand, calculamos la solución del sistema (5.12).

```
a=rand()
a =  0.51956
b=rand()
b =  0.61491
c=rand()
c =  0.35544m=rand()
m =  0.99834
n=rand()
n =  0.071559
A=[-b/a,c/a,0;1,0,0;0,1,0;0,0,1]
A =

-1.18351   0.68411   0.00000
1.00000   0.00000   0.00000
0.00000   1.00000   0.00000
0.00000   0.00000   1.00000
```

```
v=[-1/a*(b+b*n-c+c*m);n+1;1-m;a]
v =

-1.2670726
1.0715594
0.0016551
0.5195594
```

```
A\v
ans =

1.0715594
0.0016551
0.5195594
```

A continuación se hizo la verificación en Octave. Es decir, con los valores de α, β, γ encontrados, se vio que el v propuesto por Octave es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Los estudiantes puede resolverlo usando otros números aleatorios.

CAPÍTULO

6

Transformaciones lineales

Este capítulo trabaja con la noción de transformación lineal y, también, autovalores y autovectores. Su objetivo es estudiar ciertas funciones definidas entre espacios vectoriales y sus propiedades más importantes.

6.1. Introducción a las transformaciones lineales

El siguiente problema introduce la noción de transformación lineal. Para ello se le da un nuevo sentido a la resolución del sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$. Resolver ese sistema es equivalente a encontrar todos los vectores X que se transformen en el vector B por la acción de multiplicar por A. Esto sucede cuando se piensa en la matriz A como un objeto que actúa sobre X, multiplicándolo, para producir un nuevo vector llamado $A \cdot X$.

6.1.1. Problema modelo

1. Si se multiplica una matriz A de tamaño 2×2 por un vector X de tamaño 2×1, se obtiene otro vector $B = A \cdot X$ de tamaño 2×1.
   Sean cada una de las matrices A:

   a) $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   c) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   d) $A := \begin{pmatrix} cos(45^o) & -sen(45^o) \\ sen(45^o) & cos(45^o) \end{pmatrix}$

   - Dibujar en Geogebra el cuadrado C de vértices $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - Realizar, para cada X_i, la operación $A \cdot X_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

- ¿Qué ocurre con cualquier punto (x, y) del cuadrado C si se lo multiplica por A?
- Dibujar el cuadrilátero $A(C)$ de vértices $A \cdot X_1$, $A \cdot X_2$, $A \cdot X_3$ y $A \cdot X_4$.
- ¿En qué figura geométrica se transforma el cuadrado C al multiplicar cada uno de los puntos de sus segmentos y vértices por la matriz A?

2. La operación: cada vector X se transforma al multiplicar por A en el vector $A \cdot X$, puede pensarse como una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(X) = A \cdot X.$$

Elegir una de las matrices del ítem anterior y resolver las consignas.

- Probar que la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cumple

  - $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para cada $v, w \in \mathbb{R}^2$.
  - $T(kv) = kT(v)$ para cada $v \in \mathbb{R}^2$ y cada $k \in \mathbb{R}$.

Las funciones T que verifican los dos ítems anteriores se llaman transformaciones lineales.

- Para la función del ítem anterior encontrar todos los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $T(x, y) = (0, 0)$.

El conjunto de todos los (x, y) *tales que* $T(x, y) = (0, 0)$ *se llama núcleo de* T.

Resolución del problema modelo

Graficamos con Geogebra cada cuadrilátero para ver cómo se transforman sus puntos al multiplicarlos por la matriz A.

Empezamos con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Tenemos que

$$B_1 = A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = A \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando multiplicamos por A cualquier punto $(x, y) \in C$, se transforma en

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

En el dibujo se observa que el cuadrado C se transforma en el siguiente rectángulo al multiplicar cada uno de sus puntos por A . Más precisamente, la multiplicación de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por A alarga x en dos y achica y en la mitad.

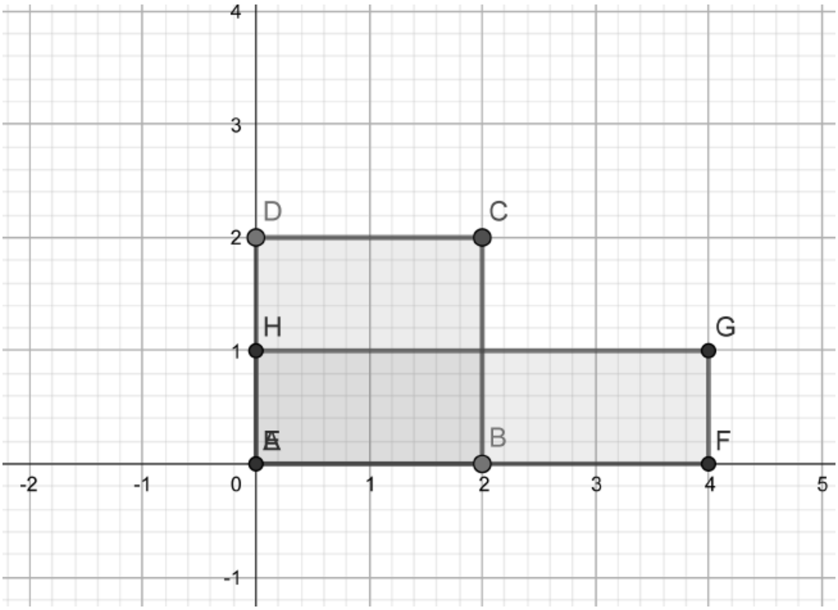


Figura 6.1

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tenemos lo siguiente:

$$B_1 = A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = A \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cualquier punto $(x, y) \in C$, cuando lo multiplicamos por A, se transforma en

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

En el dibujo vemos que el cuadrado C se transforma al multiplicar cada uno de sus puntos por A en el mismo cuadrado, pero reflejado sobre el eje X.

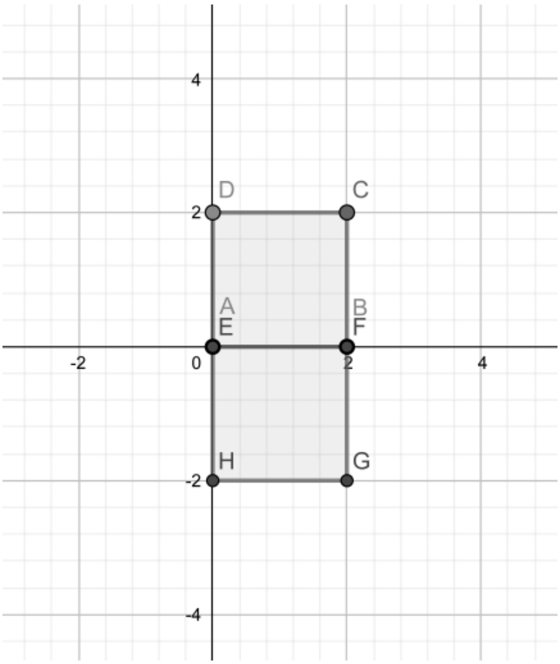


Figura 6.2

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos lo siguiente:

$$B_1 = A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = A \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cuando multiplicamos por A cualquier punto $(x, y) \in C$, se transforma en

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Esta multiplicación matricial produce una reflexión sobre la línea $y = x$. Observemos que deja fijos los puntos de la recta $y = x$. Es tarea de los estudiantes realizar esa gráfica.

Por último, si tomamos la matriz $A := \begin{pmatrix} cos(45^o) & -sen(45^o) \\ sen(45^o) & cos(45^o) \end{pmatrix}$, tenemos lo siguiente:

$$B_1 = A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B_4 = A \cdot X_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Cuando lo multiplicamos por A, cualquier punto $(x, y) \in C$, se transforma en

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{pmatrix}.$$

Esta multiplicación matricial rota en 45^o el cuadrado C, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

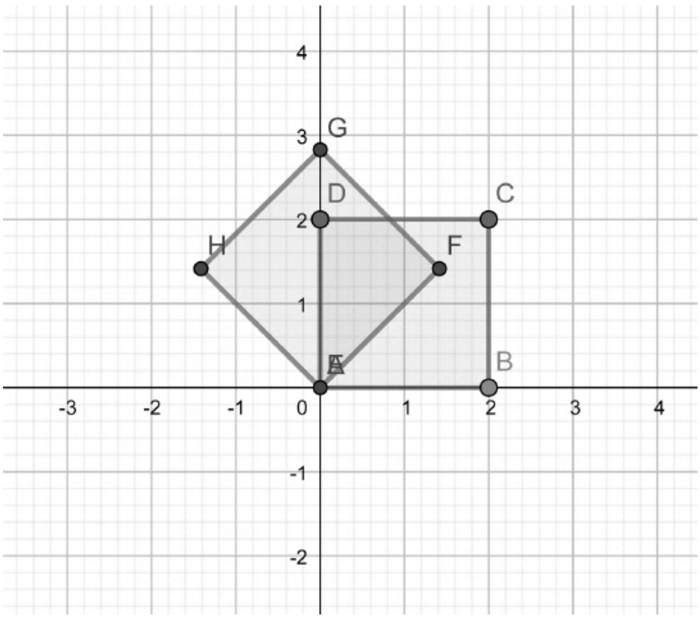


Figura 6.3

Para el punto 2 del problema modelo, tomamos la primera matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En el ítem anterior se observó que, si tomamos un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A \cdot v$ se convierte en otro vector $(2x, \frac{1}{2}y)$. Se puede pensar esta acción como una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y).$$

Ya se vio más arriba que esta función expande dos veces horizontalmente cualquier gráfica y la aplasta a la mitad. En el ítem anterior, transformamos el cuadrado de lado 2 en un rectángulo de base 4 y altura 1.

En este punto, debemos probar que si tomamos cualesquiera $v, w \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(v + w) = T(v) + T(w).$$

En efecto, sea $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$, entonces

$$T(v+w) = T(a+c, b+d) = (2(a+b), \frac{1}{2}(c+d) = (2a, \frac{1}{2}c)+(2b, \frac{1}{2}d) = T(v)+T(w).$$

De manera análoga, se puede probar que si $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(kv) = kT(v).$$

Por lo tanto, se puede que ver que la función T cumple que $T(v+w) = T(v)+T(w)$ y que $T(kv) = kT(v)$ para todo vector v, w y para todo escalar k. Por lo tanto, T es una transformación lineal que permite un estiramiento horizontal en 2 y una contracción vertical en $\frac{1}{2}$.

Por último, buscamos todos los (x, y) tales que $T(x, y) = (0, 0)$. El único elemento que cumple es el vector $(0, 0)$. En efecto, $T(x, y) = (0, 0)$ es equivalente a $(2x, \frac{y}{2}) = (0, 0)$, con lo que $x, y = 0$. Se espera que los estudiantes resuelvan el punto 2 usando otra matriz.

6.1.2. Guía de problemas

Los ejercicios de esta sección exploran geométricamente el significado de una transformación lineal.

Ejercicio 6.1.1. *a) Dibujar con Geogebra el círculo* $x^2 + y^2 = 1$.

b) *Aplicar a todos los puntos del círculo la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *¿Qué forma tiene la curva?*

Ejercicio 6.1.2. *Sea la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *donde* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) *Probar, usando Geogebra, que el transformado de cualquier punto de la recta* $y = x$ *pertenece a dicha recta.*

b) *¿Cuál es el transformado del punto* $(1, 0)$*? ¿Y el del punto* $(0, 1)$*?*

c) *Dibujar, usando Geogebra, el segmento de lados* $(3, 1)$ *y* $(6, 3)$*. ¿Cuál es el transformado de dicho segmento vía* T*?*

d) *Usando los ítems anteriores, investigar qué quiere decir la siguiente frase: "La matriz* A *respresenta una simetría respecto de la recta que pasa por el origen* $y = x$*".*

Ejercicio 6.1.3. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *produce una transformación por esfuerzo cortante que deja el eje* Y *sin cambio. Usando Geogebra, mostrar qué les ocurre a los vectores* $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 0)$ *y a todo el eje* X *cuando se le aplica* T.

Ejercicio 6.1.4. *Usando Geogebra, describir completamente la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $T(x, y) = (-y, x)$.

Ejercicio 6.1.5. *Mostrar con Geogebra que la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ *transforma puntos pertenecientes a la recta* $y = -2x$ *en otros puntos pertenecientes a la misma recta.*

Ejercicio 6.1.6. *Describir qué transformación representa la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.1.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

La transformación del ejercicio 6.1.1 produce un alargamiento en el eje X, por lo que el círculo se transforma en una elipse (lugar geométrico que se verá en el último capítulo). Es decir, cada vector (x, y) se transforma linealmente vía T en el vector $(2x, y)$.

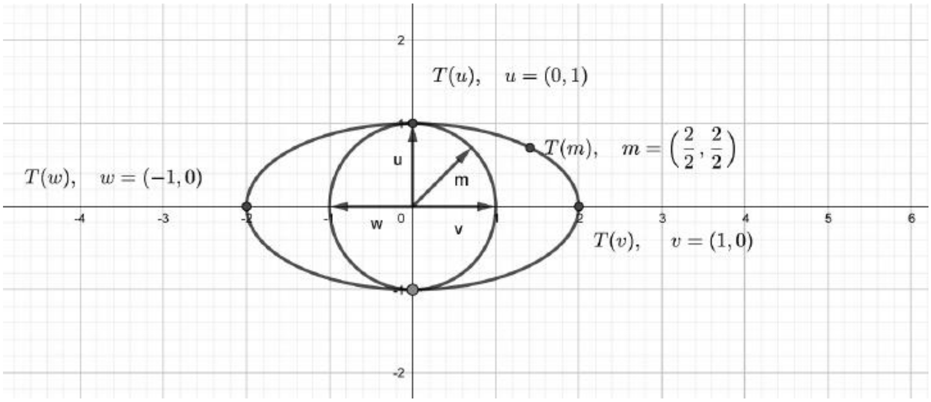


Figura 6.4

En el ejercicio 6.1.4, T se puede escribir de la forma

$$T(x,y)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Como actividad, los estudiantes deben probar la siguiente afirmación usando Geogebra: Como $(-y,x)$ es perpendicular a (x,y), la transformación lineal realiza un giro de 90 grados, en sentido antihorario.

6.2. Núcleo e imagen y la matriz de una transformación lineal

El objetivo de este problema modelo es estudiar algunos conceptos asociados a una transformación lineal, como el núcleo, la imagen y la matriz de una transformación lineal.

6.2.1. Problema modelo

1. Sean $A := \begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}3\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$ y $c := \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$. Sea la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

   a) Mostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(3u) = 3T(u)$.

   b) Encontrar $T(u)$, la imagen de u bajo la transformación T.

   c) Encontrar una $x \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea b.

d) ¿Hay más de una x cuya imagen bajo T sea b?.

e) Determinar si c está en la imagen de la transformación lineal T.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(v) = (1,2)$ y $T(w) = (1,4)$. Calcular $T(v+w)$ y $T(3v-2w)$.
3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(1,0) = (5,3)$ y $T(0,1) = (1,4)$.

   a) Calcular $T(4,5)$

   b) Calcular $T(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) Encontrar A tal que $T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   d) Encontrar todos los (x,y) tales que $T(x,y) = (0,0)$
4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(1,1) = (1,-2)$ y $T(-1,1) = (2,3)$.

   a) Calcular $T(-1,5)$.

   b) Calcular $T(x,y)$.

   c) Encontrar una matriz A tal que $T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Esa matriz se llama *matriz canónica asociada a T*.
5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2, x_3+x_4)$.

   a) ¿$(1,-1,0,0) \in \mathrm{Nu}(T)$?

   b) Encontrar todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ que están en $\mathrm{Nu}(T)$, el núcleo de T.

   c) Encontrar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que están en $\mathrm{Im}(T)$, la imagen de T.

Resolución del problema modelo

En el punto 1 a) del problema, tenemos que probar

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \quad T(3u) = 3T(u).$$

Por un lado, $T(u+v) = T(3,-1) = (0,14,4)$. Por otro lado, $T(u)+T(v) = (5,1,-9) + (-5,13,13) = (0,14,4)$.

De la misma manera, se puede probar que $T(3u) = 3T(u)$. En efecto, $T(3u) = T(6,-3) = (15,3,-27)$. Además, $3T(u) = 3(5,1,-9) = (15,3,-27)$.

En el ítem b), observamos que si $u = (2,-1)$, mediante la transformación lineal T transformamos ese vector en $T(u) = (5,1,-9)$, que es un vector en $\mathbb{R}^3$.

En el ítem c), debemos encontrar un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = b$. Es decir, buscamos un $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $A \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ Queda a cargo de los estudiantes verificar que la solución de este sistema es $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{-1}{2}$.

En el ítem d), se pide decidir si existe más de un $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = b$. Esto equivale a decidir si el sistema $Ax = b$ tiene más de una solución. Por la cuenta anterior, sabemos que el sistema tiene solución única, entonces esto significa que existe solo un $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $A \cdot x = b$.

En el ítem e), se debe averiguar si el vector c está en la imagen de T, esto equivale a preguntarnos si existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax = c$. Es decir, si el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = c$ tiene solución. Es una tarea para los estudiantes probar que el sistema de ecuaciones lineales anteriores no es compatible. Concluimos así que c no está en la imagen de T.

En el punto 2, sabemos que T es una transformación lineal tal que $T(v) = (1, 2)$ y $T(w) = (1, 4)$. Debemos calcular $T(v + w)$ y $T(3v - 2w)$. Para ello, tenemos que usar la definición de transformación lineal. En efecto,

$$T(v + w) = T(v) + T(w) = (1, 2) + (1, 4) = (2, 6).$$

y, por otro lado,

$$T(3v - 2w) = T(3v) - T(2w) = 3T(v) - 2T(w) = 3(1, 2) - 2(1, 4) = (1, -2).$$

En el punto 3, también se usa la definición de transformación lineal. Debemos calcular $T(4, 5)$ conociendo que $T(1, 0) = (5, 3)$ y $T(0, 1) = (1, 4)$. La dificultad radica en que no sabemos cuál es la fórmula que describe a T para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, tenemos que el vector $(4, 5)$ se puede escribir de manera única como una combinación lineal de los vectores canónicos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Es decir,

$$(4, 5) = 4 \cdot (1, 0) + 5 \cdot (0, 1).$$

Aplicamos la transformación lineal T a la igualdad anterior y usamos que $T(v+w) = T(v) + T(w)$:

$$T(4, 5) = T(4 \cdot (1, 0)) + T(5 \cdot (0, 1)).$$

A continuación, usamos que T saca afuera escalares, es decir que $T(kv) = kT(v)$:

$$T(4, 5) = 4 \cdot T(1, 0) + 5 \cdot T(0, 1) = 4 \cdot (5, 3) + 5 \cdot (1, 4).$$

Concluimos así que $T(4,5) = (25,32)$.

Es posible hacer la cuenta anterior para cualquier vector (x,y). Es decir, tomando en cuenta el hecho de que (x,y) se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos $(1,0)$ y $(0,1)$,

$$(x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1).$$

Aplicamos la transformación lineal a la igualdad anterior y usamos la definición de transformación lineal:

$$T(x,y) = x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) = x \cdot (5,3) + y \cdot (1,4) = (5x + y, 3x + 4y).$$

La definición de T se puede escribir también de manera matricial:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, se llama la *matriz asociada a la transformación lineal* T.

En el último ítem tenemos que encontrar los (x,y) tales que $T(x,y) = (0,0)$. El núcleo de T, que se denota $Nu(T)$, es el conjunto formado por los vectores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $T(x,y) = (0,0)$. Encontrar estos valores es equivalente a resolver el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el sistema tiene solución única, que es la trivial. Así que el único vector que cumple que $T(x,y) = (0,0)$ es el $(0,0)$. Concluimos que el núcleo de esta trasformación lineal es $\mathrm{Nu}(T) = \{(0,0)\}$. Este tipo de transformaciones lineales se llama *transformaciones lineales inyectivas.*

El problema del punto 4 tiene una dificultad adicional: necesitamos escribir $(-1,5)$ como combinación lineal de $(1,1)$ y $(-1,1)$. Es decir, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(-1,5) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1).$$

Es una tarea de los estudiantes la siguiente verificación:

$$(-1,5) = 2(1,1) + 3(-1,1).$$

De esta manera,

$$T(-1,5) = 2T(1,1) + 3T(-1,1) = 2(1,-2) + 3(2,3) = (8,5).$$

Del mismo modo, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1).$$

Los estudiantes deberán realizar la siguiente verificación:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{y-x}{2}(-1,1).$$

Por lo tanto,

$$T(x,y) = \frac{x+y}{2}T(1,1) + \frac{y-x}{2}T(-1,1) = \frac{x+y}{2}(1,-2) + \frac{y-x}{2}(2,3).$$

Concluimos así que

$$T(x,y) = (\frac{3y-x}{2}, \frac{y-5x}{2}).$$

La resolución del punto 5 sirve para introducir los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal. Ambos son subespacios y tienen una cantidad finita de vectores que lo generan y que resultan linealmente independientes.

Para resolver el ítem a), hay que recordar la definición de $\mathrm{Nu}(T)$, que dice que son todos los vectores v tales que $T(v) = 0$. Así si $v = (1,-1,0,0)$, usando la definición de T, $T(1,-1,0,0) = (0,0)$. Por lo que concluimos que v está en el núcleo de la transformación lineal.

En el ítem b), se deben hallar todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ que se encuentran en el núcleo de T, es decir, todos los vectores tales que $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0)$. Esto es lo mismo que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Así,

$$\mathrm{Nu}(T) = \{x_2 \cdot (-1,1,0,0) + x_4 \cdot (0,0,-1,1) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Finalmente, debemos encontrar $\mathrm{Im}(T)$, es decir todos los $w = (w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que existe $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ con la propiedad que $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (w_1,w_2)$. Los elementos w que cumplen la propiedad anterior se dice que son las *imágenes de* T.

Un vector $w = (w_1, w_2)$ está $\mathrm{Im}(T)$ si y solo si $(x_1 + x_2, x_3 + x_4) = (w_1, w_2)$. Esto equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = w_1 \\ x_3 + x_4 = w_2 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución siempre, para cualquier w; es más, tiene infinitas soluciones. Esto quiere decir que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$. Notemos que una base de $\mathrm{Im}(T)$ es $\{(1,0),(0,1)\}$. ¿Se puede dar otra base para la imagen de la transformación lineal T?

6.2.2. Guía de problemas

En esta sección hay ejercicios sobre transformaciones lineales, el cálculo de su núcleo y su imagen.

Ejercicio 6.2.1. *a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ está definido por $T(x) = Ax$ para alguna matriz A y cada x en $\mathbb{R}^5$. ¿Cuántas filas y columnas tiene A?*

b) Sea $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dar una descripción geométrica de la transformación lineal $T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.2.2. *Sean $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Definir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $T(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y encontrar $T(u)$, $T(v)$ y $T(3u - 5v)$.*

Ejercicio 6.2.3. *Sea T una transformación lineal definida como $T(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar un vector (x,y,z) cuya imagen bajo T sea $b := \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Determinar si (x,y,z) es único.*

Ejercicio 6.2.4. *Sea* $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *y* $v := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) En un sistema de ejes cartesianos rectangulares, graficar u, v, $T(u)$ *y* $T(v)$.

b) Dar una descripción geométrica de lo que T *le hace a un vector* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *cualquiera.*

Ejercicio 6.2.5. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal tal que* $T(v) = (1, 2, 3)$ *y* $T(w) = (-1, 2, 3)$.

a) Calcular $T(3v)$ *y* $T(2w)$.

b) Calcular $T(2v - 3w)$ *y* $T(v + 5w)$.

Ejercicio 6.2.6. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(1, 0) = (3, -5)$ *y* $T(0, 1) = (-2, 7)$.

a) Encontrar $T(7, 6)$ *y* $T(x, y)$.

b) Encontrar una matriz A *tal que* $T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) Encontrar todos los (x, y) *tales que* $T(x, y) = (0, 0)$.

Ejercicio 6.2.7. *Encontrar la matriz canónica asociada a la transformación lineal* T *para cada uno de los siguientes casos:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1, 0) = (4, -1, 2)$ *y* $T(0, 1) = (-5, 3, -6)$.

b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, 0)$.

Ejercicio 6.2.8. *Hallar la expresión general de la transformación lineal* $T(x_1, x_2, x_3)$ *si* $T(1, 1, -1) = (0, 3, 1)$, $T(1, 0, 1) = (2, -1, 1)$ *y* $T(1, 1, 0) = (3, 2, 4)$.

Ejercicio 6.2.9. *Decidir si existe una transformación lineal que cumpla:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1, 1) = (1, 1, 1)$, $T(1, 0) = (0, 2, 0)$ *y* $T(5, 2) = (4, 5, 2)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1, -1, 0) = (3, 1)$, $T(2, 0, 1) = (-1, 1)$ *y* $T(0, 4, 1) = (-7, -7)$.

Ejercicio 6.2.10. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 7x_2)$. *Encontrar un* (x, y) *tal que* $T(x, y) = (-2, -5)$.

Ejercicio 6.2.11. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una función definida por* $T(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$.

a) Verificar que T es una transformación lineal.

b) ¿$(2, 3, -7)$ *está en la imagen de* T*?*

Ejercicio 6.2.12. *Indicar por qué la función* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y) = (x - y, 2x + 2)$ *no es una transformación lineal.*

Ejercicio 6.2.13. *Dadas las siguientes funciones* $T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ *definidas por:*

- $T(x, y, z) = (x, xy, y)$
- $T(x, y) = (y, y, x, x)$,

para cada una de ellas:

a) Indicar los valores de a, b.

b) Decidir si es una transformación lineal.

c) Si la respuesta al ítem anterior es afirmativa, indicar cuál es la matriz asociada a dicha transformación lineal; es decir, hallar la matriz A *tal que* $T(v) = A \cdot v$, *para cada* v.

Ejercicio 6.2.14. *Se considera la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z).$$

a) Verificar que el vector $v = (3, 0, 3)$ *pertenece a* $\mathrm{Im}(T)$.

b) Verificar que el vector $v = (2, -1, -1)$ *pertenece a* $\mathrm{Nu}(T)$.

Ejercicio 6.2.15. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la transformación lineal definida como* $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

a) ¿$(0, 2)$ *está en* $\mathrm{Nu}(T)$?

b) ¿$(3, 0)$ *está en la* $\mathrm{Im}(T)$*?*

c) Determinar el $\mathrm{Nu}(T)$.

d) Determinar un conjunto de generadores que determine $\mathrm{Im}(T)$.

6.2.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

Se resolverán aquí algunos ejercicios variados que exploran diversos conceptos relacionados con el de transformación lineal.

En el ejercicio 6.2.1 a), se debe anticipar de qué tamaño va a ser la matriz asociada a la transformación lineal. Notemos que los elementos del dominio de T son vectores de $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $T(v) \in \mathbb{R}^2$. Así, para que exista una matriz A tal que $T(v) = A \cdot v$, necesitamos que A sea una matriz de tamaño 2×5. Es tarea de los estudiantes comprobar esta afirmación.

En el ítem b) del mismo ejercicio, se pide una descripción geométrica de la transformación lineal $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Para ello, se usará Geogebra.

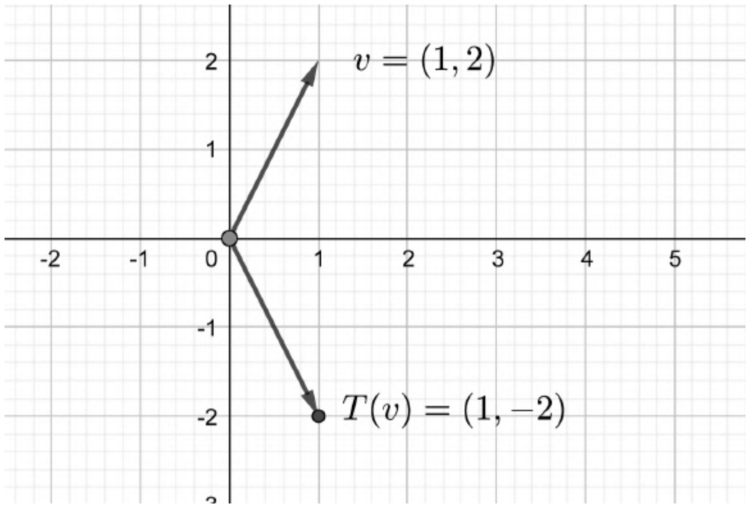


Figura 6.5

Se observa que T es una reflexión respecto del eje X.

En el ejercicio 6.2.4, usamos Geogebra para dibujar en un sistema de ejes cartesianos los vectores u, v, $T(u)$ y $T(v)$. Mediante los dibujos, se observa que la transformación lineal T transforma un vector cualquiera (x, y) en otro $(0, y)$, vector que se encuentra en el eje Y. Es una actividad de los estudiantes realizar los gráficos.

En el ejercicio 6.2.6, usamos la definición de transformación lineal.

Un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

Aplicamos T y la definición de transformación lineal:

$$T(x, y) = x \cdot T(1, 0) + y \cdot T(0, 1) = x \cdot (3, -5) + y \cdot (-2, 7).$$

Concluimos así que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de este ejercicio se define como $T(x, y) = (3x - 2y, -5x + 7y)$.

Otra manera de escribir esta transformación lineal es $T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde la matriz asociada a la transformación lineal es $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

El ejercicio 6.2.12 trabaja con la negación de la definición de transformación lineal. Para analizarlo, entonces, nos preguntamos cuándo una función no es una transformación lineal. Para ello se debe analizar esta definición. Observemos que para que una función no sea una transformación lineal, hay que encontrar dos vectores v, w tales que o bien no cumplan $T(v + w) = T(v) + T(w)$, o bien no cumplan $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$, con k un escalar real. Observemos que si la función T de este ejercicio fuera una transformación lineal, entonces $T(0, 0) + T(0, 0) = T(0, 0)$, pero en este caso, se tiene que $T(0, 0) = (0, 2)$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, la función de este ejercicio no es una transformación lineal.

Más generalmente, se tiene que si T es una transformación lineal, por la definición debería valer que $T(0, 0) = T(0, 0) + T(0, 0)$, es decir que $T(0, 0) = (0, 0)$.

6.3. Autovalores y autovectores

Este problema modelo está pensado para trabajar con las nociones de autovalores y autovectores asociados a una transformación lineal. En una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pueden moverse vectores en distintas direcciones, pero existen vectores especiales sobre los cuales la acción de T es sencilla.

Más precisamente, escribimos T de la forma $T(v) = A \cdot v$, donde A es una matriz cuadrada llamada la matriz asociada a la transformación lineal. Una cuestión de importancia en distintos problemas de aplicación es encontrar vectores v tales que v y $A \cdot v$ sean paralelos, es decir que exista $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = k \cdot Av$.

Un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ es un *autovector de A* si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $A \cdot v = k \cdot v$, o que es lo mismo $T(v) = k \cdot v$. El número real k se llama *autovalor de A*. Este número real puede ser nulo.

6.3.1. Problema modelo

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Calcular $T(v)$, $T(w)$ con $v = (1, 0)$ y $w = (0, 1)$ y graficar los vectores v y w, y sus transformados. ¿Qué se observa? Escribir lo observado.
   b) ¿Qué pasa con los vectores de la forma $(k, 0)$ y $(0, k)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$ cuando se les aplica T?
   c) ¿Cómo se puede calcular $T(1, 5)$ a partir de los ítems anteriores? Realizar gráficos para ver qué ocurre visualmente. Escribir las conjeturas encontradas.
2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   a) Explorar cómo transforma T a distintos vectores.
   b) ¿Qué ocurre con los vectores $v = (1, 1)$ y $w = (1, -1)$?
   c) Indicar cuáles son los autovalores y los autovectores asociados a los autovalores encontrados.
3. Para cada una de las siguientes matrices, encontrar todos los autovectores reales y todos los autovalores asociados.
   - $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
   - $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   - $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Encontrar todos los autovalores y autovectores de A.
   b) Tomar un autovalor y su autovector asociado encontrado en el ítem a. Llamar al autovalor elegido λ y al autovector asociado v. Probar que v es autovector de $B = A - 7 \cdot I$.
   c) Hallar el autovalor de B asociado al autovector v.
   d) Elegir cualquier autovector v de A. ¿Es, también, autovector de B? ¿Qué relación hay entre el autovalor asociado a v de A con el autovalor asociado a v de B?

Resolución del problema modelo

De la definición de la transformación lineal T, tenemos que $T(1,0) = (3,0)$ y $T(0,1) = (0,2)$. Gráficamente, esto indica que el transformado $(3,0)$ queda en la misma recta que el vector $(1,0)$. De la misma manera, $(0,1)$ y $T(0,1) = (0,2)$ están en una misma recta. Más aún, si tomamos cualquier vector de la forma $(k,0)$ o de la forma $(0,k)$ con $k \in \mathbb{R}$, tenemos, por un lado, que $T(k,0)$ y $(k,0)$ están en una misma recta y, por otro, que $T(0,k)$ y $(0,k)$ están en otra misma recta.

Siguiendo con los cálculos, $T(k,0) = 3 \cdot (k,0)$. Esto quiere decir que 3 es autovalor de T y que todos los vectores de la forma $(k,0)$ son los autovectores asociados al autovalor 3. Más aún, el conjunto $S_3 = \{k \cdot (1,0) \, : \, k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0\}$ forma el subespacio de todos los autovectores asociados al autovalor 3. Igualmente, como $T(0,k) = 2 \cdot (0,k)$, 2 es autovalor de T y todos los vectores $(0,k)$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ son los autovectores asociados al autovalor 2. Así $S_2 = \{k \cdot (0,1) \, : \, k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0\}$ es el subespacio de todos los autovectores asociados al autovalor 2.

Consideramos $v = (1,0)$ y $w = (0,1)$, los autovectores asociados a los autovalores 3 y 2, respectivamente. Escribimos $(1,5)$ como combinación lineal de v y w de la forma

$$(1,5) = 1 \cdot v + 5 \cdot w.$$

Al aplicar la transformación lineal T, podemos escribir $T(1,5)$ de la forma

$$T(1,5) = 1 \cdot 3 \cdot v + 5 \cdot 2 \cdot w.$$

Es decir, $T(1,5)$ es una combinación lineal de los vectores v y w, donde los escalares son un múltiplo de los autovalores correspondientes.

Esto se puede generalizar: si se toma cualquier vector u que resulta ser una combinación lineal de los autovectores v y w, es decir,

$$u = \alpha \cdot v + \beta \cdot w,$$

entonces,

$$T(u) = 3 \cdot \alpha \cdot v + 2 \cdot \beta \cdot w.$$

También $T(u)$ es una combinación lineal de v y w, donde los escalares son múltiplos de los autovalores 3, 2. Observemos que los autovalores se encuentran en la diagonal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En el punto 2, es tarea de los estudiantes explorar cómo transforma T determinados vectores de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, $T(v) = v$ y $T(w) = 0$.

Por otro lado, buscamos los autovectores de T, es decir, buscamos $v \in \mathbb{R}^2$ no nulos tal que $T(v) = kv$. Por la definición de T, esto se traduce en encontrar $v \neq 0$ tal que $A \cdot v = k \cdot v$; o equivalentemente, encontrar los $v \neq 0$ tales que $(A - k \cdot I) \cdot v = 0$.

Este problema se traduce en encontrar las soluciones v no nulas del sistema homogéneo

$$(A - k \cdot I) \cdot v = 0. \tag{6.1}$$

Como queremos que el sistema anterior tenga infinitas soluciones, hay que pedir que

$$\det(A - k \cdot I) = 0,$$

donde $A - k \cdot I$ es una matriz cuadrada de tamaño 2×2. Por lo tanto, se buscan los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que anulan al determinante anterior. Como $\det(A - k \cdot I) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - k \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} - k)^2 - \frac{1}{4} = k^2 - k$, hay que buscar $k \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 - k = 0$. Deducimos así que el determinante es nulo si y solo si $k = 0$ o $k = 1$.

Concluimos, entonces, que el sistema homogéneo (6.1) tiene infinitas soluciones si $k = 0$ y $k = 1$.

Estos valores hacen que se cumpla $A \cdot v = k \cdot v$. Los valores de k son los autovalores de A. A continuación, hay que buscar los autovectores $v \neq 0$ asociados a dichos autovalores.

Si $k = 0$, $A \cdot v = 0$. Si escribimos $v = (x, y)$, esto es equivalente a resolver la siguiente ecuación lineal $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$. Por lo tanto, un autovector v asociado al autovalor 0 se encuentra en el conjunto de todos los vectores (x, y) no nulos tales que $y = -x$. Un autovector asociado al autovalor 0 es $v = (1, -1)$. Notemos que cualquier múltiplo de $v = (1, -1)$ también es autovector asociado al autovalor 0.

Por otro lado, si $k = 1$, entonces, $A \cdot v = 1 \cdot v$. Esta igualdad equivale a encontrar $v = (x, y)$, que son solución de la ecuación lineal $\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$. Por lo tanto, un autovector v asociado al autovalor 1 se encuentra en el conjunto de todos los vectores (x, y) no nulos tales que $y = x$. Un autovector asociado al autovalor 1 es $v = (1, 1)$. Notemos que cualquier múltiplo de $v = (1, 1)$ también es autovector asociado al autovalor 1.

A continuación resolvemos el punto 3 con la última matriz A. Corresponde a los estudiantes resolver los cálculos para las otras dos matrices.

Buscamos los vectores $v = (x, y, z)$ no nulos tales que $A \cdot v = k \cdot v$. Por lo anterior, equivale a encontrar $k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\det(A - kI) = 0,$$

donde I es la matriz identidad de tamaño 3×3.

Para ello, calculamos el determinante de la matriz $B = A - kI$. Se obtiene $\det(B) = -k^3 + 27 = 0$. Por lo tanto, el autovalor real de A es $k = 3$. Ahora, hay que encontrar los autovectores asociados a 3. Para eso, tenemos que resolver el sistema homogéneo

$$(A - 3 \cdot I) \cdot v = 0.$$

Esto equivale a resolver

$$\begin{cases} -3x + 27z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Es tarea de los estudiantes verificar que las soluciones de ese sistema son $z(9, 3, 1)$ con $z \in \mathbb{R}$. Entonces, un autovector asociado al autovalor 3 es $v = (9, 3, 1)$ y todos los autovectores asociados al autovalor 3 forman el subespacio $S_3 = \{z(9, 3, 1); z \in \mathbb{R}, \quad z \neq 0\}$.

En el punto 4, se observa que encontrar un autovalor k de A equivale a resolver $A \cdot v = k \cdot v$, con $v \neq 0$. Esto último equivale a encontrar $v \neq 0$ tal que $(A - k \cdot I) \cdot v = 0$. La última igualdad significa que encontramos una solución no tivial del sistema homogéneo $(A - k \cdot I) \cdot X = 0$. Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, con la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas, tiene infinitas soluciones si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema es nulo.

Por lo tanto, encontrar los valores de k tales que $A \cdot v = k \cdot v$, equivale a encontrar los k tales que $\det(A - k \cdot I) = 0$.

Así, para encontrar los autovalores k asociados a la matriz A es necesario encontrar los valores k tales que $\det(A - k \cdot I) = 0$. Más aún, se puede pensar $\det(A - k \cdot I)$ como un polinomio cuyo grado corresponde a la cantidad de filas de A. En el caso del ejercicio, corresponde a un polinomio de grado 2, y queremos hallar las raíces de dicho polinomio.

El polinomio $f(k) = \det(A - k \cdot I)$ asociado a la búsqueda de los autovalores k de A se llama el *polinomio característico de A*. Lo que buscamos son los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $f(k) = 0$, es decir, las raíces del polinomio característico asociado a la matriz A.

En nuestro caso, el polinomio característico asociado a A es

$$f(k) = \det \begin{pmatrix} 1 - k & -1 \\ 2 & 4 - k \end{pmatrix} = (1 - k)(4 - k) + 2 = k^2 - 5k + 6.$$

Es tarea de los estudiantes verificar que las raíces de f son $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$. Estos dos valores corresponden a los autovalores de A.

Observemos que la suma de los autovalores es la suma de la diagonal de la matriz A (la traza de A) y el producto de los autovalores es igual al determinante de A. En este caso, la suma de los autovalores es 5, que corresponde al coeficiente lineal (con un cambio de signo) del polinomio característico, y el producto de los autovalores, que es 6, corresponde al término independiente.

Se buscan ahora los autovectores asociados a los autovalores 3 y 2. Para este caso, hay que encontrar v no nulo tal que $(A - 3 \cdot I) \cdot v = 0$ y $(A - 2 \cdot I) \cdot v = 0$. Es tarea de los estudiantes resolver estos sistemas homogéneos y probar que los autovectores asociados al autovalor 3 son todos los vectores de la forma $\gamma(1, -2)$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq 0$. También deben probar que vectores de la forma $\beta \cdot (-1, 1)$ con $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ corresponden a los autovectores asociados al autovalor 2.

Para el item b), elegimos como $\lambda := 3$ y $v := (1, -2)$, que corresponde al autovalos y aotovector asociado a la matriz A. Probemos que v es autovector de B, donde $B = A - 7I$. Para ello, buscamos k tal que $B \cdot v = k \cdot v$.

Haciendo cuentas, $B = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Esto muestra que v es autovector de B y el autovalor correspondiente es -4. Pero ¿qué relación tiene con el autovalor $\lambda = 3$ asociado a v de A? Para contestar esta pregunta, es necesario resolver el último ítem.

Sea v cualquier autovector de A con autovalor λ. Esto quiere decir que $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Por otro lado, $B \cdot v = A \cdot v - 7 \cdot v = \lambda \cdot v - 7 \cdot v = (\lambda - 7) \cdot v$. Esta cuenta muestra que v es también autovector de B pero el autovalor es $\lambda - 7$. En nuestro caso si $\lambda = 3$ es autovalor de A, entonces $\lambda - 7 = -4$ es autovalor de B. Así si v es autovector de A asociado al autovalor 3, entonces v es autovector de B asociado al autovalor -4.

6.3.2. Guía de problemas

Los siguientes ejercicios exploran los conceptos de autovalores y autovectores asociados a una matriz cuadrada.

Ejercicio 6.3.1. *Decidir si 5 es un autovalor de* $A := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.3.2. *¿$(1,-2,1)$ es autovector de* $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$*? Si lo es, encontrar el autovalor correspondiente.*

Ejercicio 6.3.3. *Para cada una de las siguientes matrices, encontrar los autovectores y autovalores asociados.*

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.3.4. *Si v es un autovector de A correspondiente al autovalor k. ¿Cuánto da $A^3 v$? ¿Qué dice la cuenta realizada?*

Ejercicio 6.3.5. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los autovalores de A y de B. Encontrar alguna relación entre ellos.

b) Hallar los autovectores de A y B. Encontrar alguna relación entre ellos.

c) Dar alguna propiedad usando las conjeturas propuestas en los ítems anteriores.

Ejercicio 6.3.6. *a) Hallar todos los k tales que* $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *tenga autovalor* 1.

b) Para los valores de k hallados, encontrar los autovectores asociados.

Ejercicio 6.3.7. *El polinomio característico de una matriz es $P(x) = x^2 - 9$ ¿De qué tamaño es la matriz y cuáles son sus autovalores?*

6.3.3. Resolución a algunos ejercicios de la guía de problemas

El ejercicio 6.3.4 es un ejercicio teórico que involucra los conceptos de autovalores y autovectores. Como v es un autovector de A correspondiente al autovalor k, $A \cdot v = k \cdot v$. Así, para calcular $A^3 \cdot v$, se aplican propiedades ya vistas de operaciones con matrices. Es tarea de los estudiantes verificar que $A^3 \cdot v = k^3 \cdot v$. Según esta cuenta, si k es autovalor de A, entonces k^3 lo es de A^3 y el autovector es el mismo para ambos casos.

En el ejercicio 6.3.5, se pide encontrar los autovalores de A y de B y, para ello, es necesario encontrar las raíces de los polinomios característicos $f_A(k) = \det(A - k \cdot I)$ y de $f_B(k) = \det(B - k \cdot I)$, respectivamente.

Así, las raíces del polinomio característico $f_A(k) = k^2 - 4k - 5$ son $k = 5$ y $k = -1$. Por lo que los autovalores de A son 5 y -1. De la misma manera, las raíces del polinomio característico $f_B(k) = k^2 - 6k$ son $k = 0$ y $k = 6$.

Hallemos los autovectores asociados a cada autovalor encontrado para las matrices A y B.

Se puede probar que un autovector de A asociado al autovalor $k = 5$ es $(1, 1)$. De la misma manera, si $k = -1$, un autovector asociado al autovalor -1 es $(1, \frac{-1}{2})$. Análogamente, si $k = 6$, un autovector de B asociado al autovalor 6 es $(1, 1)$; y si $k = 0$, un autovector de B asociado al autovalor 0 es $(1, \frac{-1}{2})$.

Según todos los cálculos realizados, si k es un autovalor de A con autovector asociado v, entonces $k + 1$ es un autovalor de B con el mismo autovector asociado. En efecto, si $A \cdot v = k \cdot v$, como $I \cdot v = v$, entonces $B \cdot v = (A + I) \cdot v = A \cdot v + I \cdot v = k \cdot v + v = (k + 1) \cdot v$.

6.4. Diagonalización

Una matriz A cuadrada en $\mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es *diagonalizable* si se puede escribir de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde D es una matriz diagonal y P es inversible. A es una matriz diagonalizable de tamaño $n \times n$ si y solo si A tiene n autovectores linealmente independientes. Dicho de otro modo, A es diagonalizable si y solo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por n autovectores de A. También se puede ver que si A tiene n autovalores distintos, entonces resulta diagonalizable. Más aún, la matriz diagonal D contiene en su diagonal todos los autovalores de A y la matriz P contiene en sus columnas todos los autovectores asociados a esos autovalores.

Los ejercicios del problema modelo están orientados a decidir si una matriz es diagonalizable o no y a observar la importancia que tiene el hecho de que la matriz en cuestión sea diagonalizable.

6.4.1. Problema modelo

1. Calcular A^{30} con $A := \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

   Sabiendo que A se escribe de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ donde $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $D := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ¿es posible calcular A^{30} más fácilmente? ¿A tiene inversa? Si es así, ¿cuánto vale la inversa de A? ¿Qué relación hay entre el determinante de A y de D?

2. Sea la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Encontrar los autovalores de A.
   b) ¿Cuáles son los autovectores asociados a A?
   c) ¿Los autovectores son linealmente independientes? ¿Forman una base de $\mathbb{R}^2$?
   d) Escribir una matriz diagonal D con los autovalores encontrados.
   e) Encontrar una matriz P tal que $A \cdot P = P \cdot D$.
   f) ¿Cuáles son las columnas de la matriz P?
   g) ¿La matriz P es inversible?
   h) A partir de las matrices P y D de los ítems anteriores, escribir $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
   i) Calcular los polinomios característicos $p_A(k)$ de A y $p_D(k)$ de D. ¿Cómo son las raíces?
   j) Calcular los autovalores y autovectores de D y relacionarlos con la matriz A.

   Repetir lo anterior para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Las matrices cuadradas A que se pueden escribir de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con P inversible y D diagonal, se llaman matrices diagonalizables.

3. Diagonalizar, si es posible, $A := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Resolución del problema modelo

En el punto 1, es tarea de los estudiantes calcular A^{30} solo con la información de la matriz A. Seguramente, deberán resolver algunos cálculos, pero quizás no puedan llegar a multiplicar 30 veces la matriz A. Otra posibilidad es resolver el cálculo con Geogebra. Los elementos de la matriz calculada son muy grandes, y si nos piden calcular A^{30}, Geogebra posiblemente no pueda hacerlo. En cambio, usando la información de que A se escribe como $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con P inversible y D diagonal, los cálculos sean más sencillos.

Multiplicamos la igualdad anterior por A:

$$A^2 = A \cdot A = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}.$$

En general, para cualquier k entero

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}. \tag{6.2}$$

Esto quiere decir que, para calcular A^{30}, entonces tenemos que calcular D^{30}, ya que $A^{30} = P \cdot D^{30} \cdot P^{-1}$. Calcular D^{30} es mucho más fácil, ya que D es diagonal.

En este ejercicio tenemos que $D^{30} = \begin{pmatrix} 5^{30} & 0 \\ 0 & 3^{30} \end{pmatrix}$. Corresponde a los estudiantes teminar de calcular A^{30}.

Por otro lado, como $\det(A) = 15$, entonces A es inversible. Por (6.2), la inversa es $A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$, tomando $k = -1$. Dejamos como tarea al estudiante calcular A^{-1} usando que $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Concluimos así que si sabemos que A es diagonalizable es más fácil realizar ciertos cálculos, como hallar su inversa, o calcular A^k con k entero. Por otro lado, se puede observar que $\det(A) = \det(D) = 15$.

Para resolver el punto 2, empezamos con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Se espera que los estudiantes calculen el polinomio característico asociado a A, es decir $p_A(k) = k^2 - 3k - 4$ y observen que las raíces reales son 4 y -1. Así tenemos que los autovalores de A son $k = -1$ y $k = 4$. Más aún, $v = (1, -1)$ es un autovector de A asociado al autovalor $k = -1$. Por otro lado, $w = (2, 3)$ es un autovector de A asociado al autovalor $k = 4$.

Notemos que v, w son linealmente independientes, ya que la ecuación vectorial

$$\alpha v + \beta w = 0,$$

tiene solamente la solución trivial $(0, 0)$. Más aún, observemos que generan todo $\mathbb{R}^2$. De esta manera concluimos que $\{v, w\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ que consiste de los autovectores de A.

Por otro lado, la matriz diagonal D formada por los autovalores de A es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos una matriz P que verifique que $A \cdot P = P \cdot D$. Proponemos una matriz genérica $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La igualdad $A \cdot P = P \cdot D$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $a = -c$ y $b = \frac{2}{3}d$. Entonces, todos los posibles P son

$$P = \begin{pmatrix} -c & \frac{2}{3}d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Observemos que las columnas de P son los autovectores de A. Por ejemplo, $c(-1, 1)$ con $c \neq 0$ son todos los autovectores de A asociados al autovalor $k = -1$, mientras que $d(\frac{2}{3}, 1)$ con $d \neq 0$ son todos los autovectores de A asociados al autovalor $k = 4$.

Estas matrices P son inversibles, ya que el determinante es $\det(P) = -\frac{5cd}{3}$ es distinto de cero, pues $c, d \neq 0$. Una posible matriz P es cuando tomamos $c = 1$ y $d = 3$, o sea $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Es tarea de los estudiantes escribir A como $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

En cambio, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable. En efecto, si calculamos su polinomio característico $p_A(k) = \det(A - k \cdot I) = (1 - k)^2$, se observa que tiene una única raíz doble. Así, $k = 1$ es el único autovalor de A que se repite dos veces. Todos los autovectores asociados al autovalor 1 son de la forma $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$. Por lo tanto, no podemos hallar una base de $\mathbb{R}^2$ formada por los autovectores de A. Si escribimos la matriz D formada por los autovalores de A tenemos que, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Buscamos ahora una matriz P tal que $A \cdot P = P \cdot D$. Tenemos por un lado que, $A \cdot P = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$; y por otro, tenemos que $P \cdot D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

$A \cdot P = P \cdot D$ implica que $c = 0$ y $d = 0$. Deducimos que $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det(P) = 0$, concluimos que estas matrices P no son inversibles.

Retomando, el punto 2 se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, y el polinomio característico de A, $P_A(k) = k^2 - 3k - 4 = (k-4)(k+1)$ coincide con el polinomio característico de la matriz diagonal D formada por los autovalores de A, es decir $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Más aún, podemos encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ formada por los autovectores de A. En cambio para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que no es diagonalizable. No podemos encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ formada por los autovectores de A. Si calculamos su polinomio característico, $p_A(k) = (1-k)^2$, tiene una única raíz doble. Si calculamos el polinomio característico de la matriz diagonal D, formada por los autovalores de A, es decir, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que es $p_D(k) = (1-k)^2$ que coincide con $p_A(k)$. A partir de estos ejemplos deducimos la siguiente propiedad:

Proposición 6.4.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable, es decir, existen P inversible y D diagonal tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$; entonces el polinomio característico $p_A(k)$ de A coincide con el polinomio característico $p_D(k)$ de D; por lo que A y D tienen los mismos autovalores.*

Por último, debemos averiguar si la matriz A del punto 3 es diagonalizable, es decir, si podemos encontrar matrices D diagonal y P inversible tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Observemos que las matrices P y D tienen en sus componentes la información de los autovalores y autovectores de A. Más precisamente, la diagonal de la matriz D corresponden a los autovalores de A y las columnas de la matriz P corresponden a los autovectores linealmente independientes de la matriz A.

Por lo tanto, tenemos que calcular los autovalores y autovectores de A. Queda a cargo del estudiante verificar que el polinomio característico de A es $p_A(k) = \det(A - k \cdot I) = -(5-k)k(-2-k)$. Recordemos que las raíces de este polinomio corresponden a los autovalores de A. En este caso, las raíces son $k_1 = 0$, $k_2 = 5$ y $k_3 = -2$. Es tarea de los estudiantes verificar que, para el autovalor $k = 0$, un autovector asociado es $v = (8, -5, 0)$; en cambio, para el autovalor $k = -2$, un autovector asociado es $w = (-54, 49, -14)$. Por último para el autovalor $k = 5$, un autovector asociado es $u = (1, 0, 0)$.

De esta manera, $P = \begin{pmatrix} 8 & -54 & 1 \\ -5 & 49 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6.4.2. Guía de problemas

En esta sección se incluyen ejercicios relacionados con matrices diagonalizables.

Ejercicio 6.4.2. *Sea $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, calcular A^k para cada una de las siguientes matrices P y D:*

- $P := \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $P := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.4.3. *Sabiendo que los autovalores de A son 0 y 1, diagonalizar*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.4.4. *Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.4.5. *Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.*

a) ¿A es diagonalizable?

b) Calcular los autovalores de A.

c) A partir del ítem anterior, calcular los autovalores de A^2.

Ejercicio 6.4.6. *Siendo una matriz A de tamaño 2×2, cuyos autovalores son 3 y 4 y cuyos autovectores asociados son $(-1, 1)$ y $(2, 1)$, respectivamente. Sin hacer cálculos, encontrar una matriz diagonal D y una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP = D$.*

Ejercicio 6.4.7. *Sea* $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los autovalores y autovectores asociados.

b) Encontrar la matriz P y la matriz D tal que $P^{-1}AP = D$.

c) Verificar que, en este caso, $P^{-1} = P^T$.

Nota: Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son números reales. Toda matriz simétrica es diagonalizable. Más aún, si A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$*, existe una matriz P inversible tal que* $P^{-1} = P^T$ *(es decir P es ortogonal) tal que* $P^{-1}AP = D$.

6.4.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 6.4.5, se pide averiguar si A es diagonalizable. Para ello se usa una propiedad que dice que una matriz de tamaño $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n autovectores linealmente independientes. De esta manera, nuestro objetivo es encontrar los autovalores y autovectores de A. Para encontrar los autovalores, hay que hallar las raíces del polinomio característico $f_A(k) = \det(A - k \cdot I) = k^2 + k - 6$. Los autovalores de A son 2 y -3. Ahora calculamos los autovectores asociados. Para el autovalor $k = 2$, un autovector asociado es $v = (1, 1)$. En cambio, para el autovalor $k = -3$, un autovector asociado es $w = (3, -2)$.

En este caso, la matriz A, que es de tamaño 2×2, tiene 2 autovectores linealmente independientes, entonces A es diagonalizable.

Como ya vimos, los autovalores de A son $2, -3$. Entonces, si k es un autovalor de A con autovector asociado v se tiene que $A \cdot v = k \cdot v$. Así, observamos que $A^2 \cdot v = A\cdot(A\cdot v) = k\cdot A\cdot v = k^2\cdot v$. Esto quiere decir que, como A tiene los autovalores distintos $2, -3$, entonces A^2 también tiene autovalores distintos y los mismos son $2^2, (-3)^2$.

Finalmente, resolvemos el ejercicio 6.4.6. Como las raíces del polinomio característico son distintas, entonces A es diagonalizable. En ese caso, tenemos que
$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observamos que P es inversible y su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.5. Ejercicios varios

Los siguientes ejercicios relacionan varios de los conceptos de transformaciones lineales vistos más arriba.

Ejercicio 6.5.1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular con Octave el polinomio característico asociado a A.

b) Calcular con Octave los autovalores de A.

c) Decidir si la matriz A *es diagonalizable. Si lo es, calcular las matrices* P *y* D *tal que* $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, *donde* P *es inversible y* D *es diagonal.*

d) Dada la matriz A^3, *calcular los autovalores y autovectores asociados.*

e) Decidir si la matriz A^3 *es diagonalizable. Si lo es, calcular las matrices* P_1 *y* D_1 *tal que* $A^3 = P_1 \cdot D_1 \cdot P_1^{-1}$, *donde* P_1 *es inversible y* D_1 *es diagonal.*

Ejercicio 6.5.2. *Una estructura está deteriorada en el 25 %, debido a un proceso de corrosión. Se envuelve la estructura en una malla de titanio a la que se aplica un microvoltaje que invierte el proceso químico de corrosión, con lo que se logra que, mensualmente, se recupere el 40 % de la zona deteriorada, aunque se sigue deteriorando mensualmente un 20 % de la zona sana. ¿Cuál será la situación al mes de iniciado el proceso? ¿Y a los 2 meses? ¿Cuál será la situación a los 3 meses? ¿Y a los 10 meses? ¿Y al cabo de 8 años?*

a) Hacer una tabla que indique cuál será la situación al cabo de 1 mes, 2 meses y 2 meses.

b) Si se llama d_k *el tanto por uno deteriorado en el mes* k *y* s_k *el tanto por uno sano en el mes* k, *usando el ítem anterior, mostrar que* $d_0 = 0,25$ *y* $s_0 = 0,75$ *y que* $d_1 = 06 \cdot d_0 + 0,2 \cdot s_0 = 0,3$ *y* $s_1 = 0,4 \cdot d_0 + 0,8 \cdot s_0 = 0,7$. *¿Cuál es la fórmula para* d_2 *y* s_2 *en relación con los valores* d_1 *y* s_1*?*

c) A partir de los cálculos anteriores, encontrar una fórmula para d_k *y* s_k *relacionada con el tanto por uno deteriorado y sano en el mes* $k-1$.

d) Las fórmulas anteriores se pueden escribir

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{k-1} \\ s_{k-1} \end{pmatrix}.$$

e) Mostrar que a partir de la igualdad matricial anterior tenemos:

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

f) *Usando Octave, calcular cuál es el tanto por uno deteriorado y sano al mes, a los 3 meses, a los 10 meses y a los 3 años. ¿Qué conclusiones se obtienen?*

g) *Calcular los autovalores de* $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$ *y de* A^k *para cualquier* k *usando Octave.*

h) *Encontrar con Octave* P *y* D *tal que* $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ *y concluir que* $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$.

i) *A partir del ítem anterior, observar que los valores de* d_k *y* s_k *se pueden encontrar usando la siguiente fórmula*

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.5.3. *[El siguiente es un ejercicio de aplicación: El Álgebra Lineal detrás del buscador de Google]*

Hay seis dominios Web. En el gráfico siguiente, la $i \to j$ *indica el número de veces que desde el dominio i se ingresó al dominio* j.

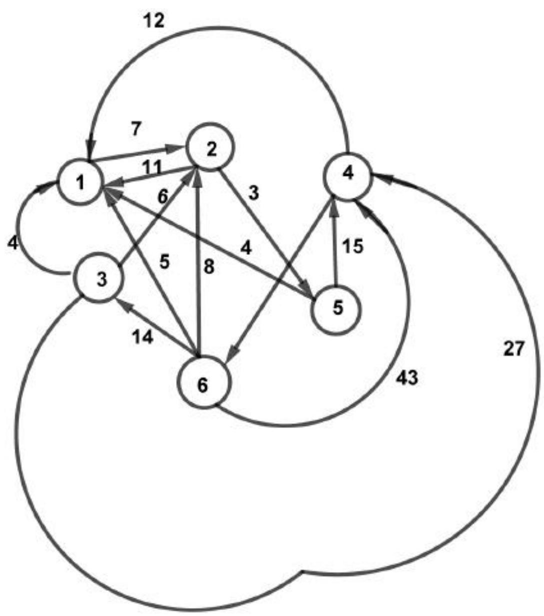


Figura 6.6

Número	*Dominio*
1	*190.119.213.67*
2	*200.106.60.5*
3	*70.32.81.160*
4	*2.17.221.161*
5	*190.223.57.19*
6	*181.65.133.4*

Basarse solamente en el número de ingresos a una página i para determinar su importancia, podría fácilmente llevar a un error. La página 1 *tiene* $12+11+4+5+4=36$ *ingresos en total, mientras que la página* 4 *tiene* $15+43+27=85$ *ingresos en total. ¿Realmente la página* 4 *es más relevante que la página* 1*?*

Resolución de algunos ejercicios

En el ejercicio 6.5.1 , para calcular el polinomio característico asociado a A, es decir, $p_A(k)=\det(A-k\cdot I)$, usamos la función $p=poly(A)$. Si se calculan las raíces con el comando $r=roots(p)$, nos devuelve los autovalores de A.

A continuación; mostramos las cuentas que se pueden realizar en Octave.

```
A=[3,-3;-2,4]
A =
3   -3
-2    4
p=poly(A)
p =

1   -7    6
r=roots(p)
r =

6
1
```

Observemos que, en este caso, los autovalores son 1 y 6.

Si, en cambio, se utiliza el comando $E=eig(A)$, Octave da un vector cuyos elementos son los autovalores de A, repetido cada uno según su multiplicidad (algebraica). Si se usa el comando $[P, D] = eig(A)$, Octave da la matriz P, cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores 1 y 6, y cuya información se encuentra en la diagonal de la matriz D. Si la matriz A es diagonalizable, la matriz P será una matriz inversible; con lo cual tendremos una diagonalización de A. Si A no es diagonalizable, la expresión $A \cdot P = P \cdot D$ no dará una diagonalización de A, puesto que P será no inversible.

A continuación se muestran las cuentas realizadas en Octave.

```
A=[3,-3;-2,4]
A =

3   -3
-2   4
```

```
E=eig(A)
E =

1
6

[P,D]=eig(A)
P =

-0.83205   0.70711
-0.55470  -0.70711

D =

Diagonal Matrix

1   0
0   6

det(P)
```

```
ans =  0.98058
A*P
ans =

-0.83205   4.24264
-0.55470  -4.24264

P*D
ans =

-0.83205   4.24264
-0.55470  -4.24264
```

En este caso, P es inversible, por lo que A es diagonalizable, y en las columnas de P se encuentran los autovectores asociados a los autovalores dados.

Por último, usando Octave, tenemos que si los autovalores de A son 1 y 6, entonces los de A^3 son 1 y 216. Este último es $216 = 6^3$.

```
A=[3,-3;-2,4]
A =
3  -3
-2   4
B=A^3
B =
87  -129
-86   130
```

```
r=roots(poly(A))
r =

6
1

r1=roots(poly(B))
```

```
r1 =

216
1
```

Para el cálculo de autovectores, usamos la función $[P, D] = eig(B)$, donde $B = A^3$. Los autovectores asociados a los autovalores encontrados son los mismos que en la matriz A.

```
A=[3,-3;-2,4]
A =
3   -3
-2   4
B=A^3
B =
87   -129
-86   130
[P,D]=eig(A)
P =
-0.83205   0.70711
-0.55470  -0.70711
D =
Diagonal Matrix
1   0
0   6
[P1,D1]=eig(B)
P1 =
-0.83205   0.70711
-0.55470  -0.70711
D1 =
Diagonal Matrix
1     0
0   216
```

Esto se debe a que, si k es autovalor de A asociado al autovector v, entonces k^3 es autovalor de A^3 asociado al autovector v. En efecto, como $A \cdot v = k \cdot v$, entonces $A^3 \cdot v = A^2 \cdot (k \cdot v) = k \cdot A \cdot (A \cdot v) = k^2 \cdot (A \cdot v) = k^3 \cdot v$.

Por último, por los cálculos realizados, sabemos que A^3 es diagonalizable y $P_1 = P$ y $D_1 = D^3$. En efecto, como $A = P \cdot D \cdot D^{-1}$, entonces,

$$A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^2 \cdot P^{-1},$$

ya que, como P es inversible, se tiene que $P^{-1} \cdot P = I$. Análogamente, $A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$.

Resolvemos ahora el ejercicio 6.5.2. Se sabe que, mensualmente, se recupera el 40 % de la zona deteriorada, aunque se sigue deteriorando, mensualmente, el 20 % de la sana.

Si consideramos tanto por uno, en el mes 0 tenemos deteriorado $0,25$ y sano $0,75$. Así, en un mes se recupera $0,25 \times 0,4 = 0,1$ de la zona deteriorada, pero la zona sana se ha reducido en $0,75 \times 0,8 = 0,6$. La zona sana al cabo de un mes será: $0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,8 = 0,1 + 0,6 = 0,7$. Procediendo de la misma manera en la zona deteriorada, al cabo de un mes tenemos $0,25 \times 0,6 + 0,75 \times 0,2 = 0,15 + 0,15 = 0,3$. Así:

Mes	Deteriorado	Sano
0	0,25	0,75
1	$0,25 \times 0,6 = 0,15$ $0,75 \times 0,2 = 0,15$ $0,15 + 0,15 = 0,3$	$0,25 \times 0,4 = 0,1$ $0,75 \times 0,8 = 0,6$ $0,1 + 0,6 = 0,7$
2	$0,3 \times 0,6 = 0,18$ $0,7 \times 0,2 = 0,14$ $0,18 + 0,14 = 0,32$	$0,3 \times 0,4 = 0,12$ $0,7 \times 0,8 = 0,56$ $0,12 + 0,56 = 0,68$
3	$0,32 \times 0,6 = 0,192$ $0,68 \times 0,20 = 0,136$ $0,192 + 0,136 = 0,328$	$0,32 \times 0,4 = 0,128$ $0,68 \times 0,80 = 0,544$ $0,128 + 0,544 = 0,672$

De este modo, podemos contestar qué pasa al mes, a los 2 meses y a los 3 meses. Se observa que, al cabo de tres meses, las partes deteriorada y sana de la estructura son $0,328$ y $0,672$, respectivamente. Pero este procedimiento es muy lento para períodos de tiempo más largos, como 10 meses u 8 años (96 meses). En esos casos, es preciso utilizar un método más práctico.

En la tabla se observa que si llamamos d_k al tanto por uno deteriorado en el mes k y s_k el tanto por uno sano en el mes k, tenemos $d_0 = 0,25$ y $s_0 = 0,75$. Por lo tanto, el deterioro en el mes 1 se relaciona con el tanto por uno deteriorado y sano del mes 0, de la siguiente manera: $d_1 = 0,6 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,75 = 0,6 \cdot d_0 + 0,2 \cdot s_0$. Del mismo modo, el tanto por uno sano en el mes 1 se relaciona con el tanto por uno deteriorado y sano del mes 0, así: $s_1 = 0,4 \cdot 0,25 + 0.8 \cdot 075 = 0,4 \cdot d_0 + 0,8 \cdot s_0$.

Es tarea de los estudiantes probar que esta relación también se cumple para el tanto por uno deteriorado y el tanto por uno sano del mes k. Más precisamente,

$$
\begin{aligned}
d_k &= 0,6 \cdot d_{k-1} + 0,2 \cdot s_{k-1} \\
s_k &= 0,4 \cdot d_{k-1} + 0,8 \cdot s_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Así, tenemos que (6.3) se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{k-1} \\ s_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Esta fórmula muestra la relación entre el tanto por uno deteriorado y sano en el mes k y en el mes $k-1$. Por ejemplo, en el mes cero,

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$$

En el mes 1,

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

En el mes 2,

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

De manera análoga, se puede pensar que mediante un proceso inductivo tenemos que

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

donde d_k es el tanto por uno deteriorado en el mes k y s_k es el tanto por uno sano en el mes k.

El ítem f) puede resolverse con Octave. Observamos que, a medida que pasa el tiempo, el tanto por ciento deteriorado y el tanto por ciento sano se estabilizan.

Por otro lado, los autovalores de A son 1 y $0,4$; por lo que los autovalores de A^k son 1 y $0,4^k$, para cualquier k natural. Como los autovalores de A son distintos se tiene que A es diagonalizable. Más precisamente, para el autovalor $k = 0,4$ se tiene que el autovector de A asociado es $(-1,1)$. De la misma manera, para el autovalor $k=1$ se tiene el autovector asociado es $(1,2)$. Así se tienen que existen las matrices P inversible y D diagonal, tal que $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$, donde $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}0,4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Es tarea de los estudiantes realizar estos cálculos con Octave o con Geogebra, y calcular $A^k = P\cdot D^k\cdot P^{-1}$.

Por último, de la cuenta anterior, concluimos que (6.4) es equivalente a

$$\begin{pmatrix}d_k\\ s_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,6 & 0,2\\ 0,4 & 0,8\end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix}d_0\\ s_0\end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix}0,4^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}d_0\\ s_0\end{pmatrix}.$$

Como la matriz P es inversible se tiene que P^{-1} existe y es igual a $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Por lo tanto, tenemos que

$$P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}d_0\\ s_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,25\\ 0,75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Por último, resolvemos el ejercicio 6.5.3. Definimos la variable x_i como la importancia de la página i. Parece razonable pedir que la importancia x_i de la página i sea proporcional a la suma de las importancias de las otras páginas j, ponderadas por el número de ingresos de estas a la página i. Más precisamente,

$$x_i = \lambda\sum_{j=1}^{6} a_{i,j}x_j, \tag{6.5}$$

donde $i=1,\dots,6$, $\lambda\in\mathbb{R}$ es una constante no nula por determinar, y los $a_{i,j}$ representan el número de los ingresos de la página j a la página i.

Sea A la matriz de tamaño 6×6, donde la entrada $a_{i,j}$ representa el número de ingresos de la página j a la página i.

$$A := \begin{pmatrix}0 & 11 & 4 & 12 & 4 & 5\\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14\\ 0 & 0 & 27 & 0 & 15 & 43\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix},$$

De esta manera, tenemos que (6.5) equivale a la siguiente representación matricial

$$\lambda\cdot A\cdot x = x, \tag{6.6}$$

donde x es un vector de tamaño 6×1.

Suponiendo que $\lambda \neq 0$, y llamando a $\beta := \frac{1}{\lambda}$, reescribimos la igualdad anterior como

$$A \cdot x = \beta \cdot x, \tag{6.7}$$

con $\beta \neq 0$. Así, resolver (6.6) equivale a encontrar los autovalores y autovectores de (6.7).

Se espera que, preferentemente en grupos, los estudiantes respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Existe solución?
2. ¿Existe un autovector con componentes reales y positivas?
3. ¿Existe un autovalor positivo?
4. Si existe un autovector y un autovalor como se requiere, ¿son únicos?
5. ¿Cómo se calculan?

Para responder las preguntas, se necesita conocer el siguiente resultado debido a Frobenius.

Teorema 6.5.4. *Sea A una matriz cuadrada con entradas no negativas. Si en el grafo que representa la matriz A (el grafo con flechas y nodos que se encuentra representado en el dibujo del ejercicio) existe una flecha o camino entre cualquier par de nodos, entonces:*

a) Existe un autovalor γ positivo tal que $Av = \gamma v$, donde el autovector v tiene componentes reales positivas. Además $\gamma \geq |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A.

b) Cualquier autovector con componentes reales positivas de A es un múltiplo de v.

Volvamos a la matriz A. Para que cumpla las hipótesis del teorema, basta con reemplazar cada cero de A por una cantidad positiva pequeña. Esto equivale a decir que existe una probabilidad remota de que, al azar, un usuario visite cualquiera de las seis páginas. Reemplazamos A por B: es decir, en vez de usar A para resolver el ejercicio, donde A es

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 11 & 4 & 12 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 15 & 43 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

usaremos la siguiente matriz

$$B := \begin{pmatrix} 0.001 & 11 & 4 & 12 & 4 & 5 \\ 7 & 0.001 & 6 & 0.001 & 0.001 & 8 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 14 \\ 0.001 & 0.001 & 27 & 0.001 & 15 & 43 \\ 0.001 & 3 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 6 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

Seguidamente, hay que resolver

$$B \cdot x = \beta x.$$

Como B cumple las hipótesis del Teorema de Frobenius, nos asegura que existe un único autovector con componentes reales positivas, que corresponden a las importancias buscadas, y un autovalor positivo correspondiente.

Es tarea de los estudiantes demostrar, usando Geogebra, que las soluciones de $\det(B - \beta I) = 0$ son (los autovalores):

$$19.9230, 7.9514, -11.1996, -8.0636 + 4.7814i, -8.0636 - 4.7814i, -0.5415.$$

Según el teorema, elegimos $\beta := 19.9230$. Buscamos ahora su único autovector asociado:

$$x := \begin{pmatrix} 0.6546 \\ 0.3462 \\ 0.1332 \\ 0.6287 \\ 0.0522 \\ 0.1894 \end{pmatrix}.$$

A continuación, las páginas ordenadas de la más importante a la menos importantes son 1, 4, 2, 6, 3 y la 5.

Observemos que, cuando hay cientos o miles de páginas, el sistema por resolver es inmenso. En esos casos, se requiere usar un software para encontrar los autovalores y autovectores.

CAPÍTULO

7

Vectores en el plano y el espacio

Este capítulo trabaja con la noción de vectores en el plano y el espacio. Estos objetos ya se presentaron en un capítulo anterior como ejemplos de matrices. Ahora se les dará un enfoque geométrico, con el el objetivo de estudiar rectas y planos definidos a partir de vectores directores.

7.1. Vectores y sus primeras operaciones

El problema modelo introduce la noción de vector en el plano y en el espacio, y trabaja con las primeras operaciones entre vectores, por ejemplo, la suma, la resta y la multiplicación por escalar.

7.1.1. Problema modelo

1. Sean los puntos $A = (1, 3)$, $B = (5, 2)$ y $C = (2, 7)$ en el plano.
   a) Graficar los puntos A, B y C y los vectores $v = AB$ y $w = AC$ en un sistema de ejes cartesianos.
   b) Dibujar el vector que tenga la misma dirección, sentido y módulo que el vector v con origen en el origen de coordenadas. Llamar v_0 a ese vector. ¿Qué coordenadas tiene v_0? ¿Qué relación tiene esas coordenadas con el vector v?
   c) Dibujar el vector w_0 con origen en $(0, 0)$, y con la misma dirección, sentido y módulo que el vector w. ¿Qué coordenadas tiene?
   d) Calcular las componentes del vector $u = BA$. Llamar u_0 a ese vector, cuyo origen es el origen de coordenadas.
   e) ¿Cuánto miden los vectores v_0 y u_0? ¿Se trata del mismo vector? ¿Por qué?
   f) ¿Cómo son los vectores v_0 y w_0?
   g) Dar tres vectores distintos perpendiculares a v_0.
   h) ¿Cómo se puede usar el Teorema de Pitágoras para ver que v_0 y w_0 son perpendiculares (u ortogonales)?

2. Sean $v := (1, 2)$, $w := (-1, 2)$ y $u := (1, 1)$.
   a) Graficar cada uno de los vectores.
   b) Graficar las siguientes operaciones y luego calcular analíticamente:

$$v + w, \quad (v + w) + u, \quad \frac{1}{2}v, \quad v - w, \quad (v - w) + u$$

3. a) Encontrar un vector $v := (x, x + 2)$ tal que $v + (1, 1) = (2, 4)$.
   b) Hallar a y b tal que $2(a, -1) + (1, -3) = (5, -b)$.
4. a) Dibujar un sistema de coordenadas y ubicar los puntos cuyas coordenadas son
      - $(2, 3, 4)$, $(-2, 3, 4)$ y $(2, 3, -4)$,
      - $(0, 2, 0)$, $(0, 0, -2)$.
   b) Graficar los siguientes vectores que pasan por el origen de coordenadas $v = (1, 2, 3)$, $w = (0, 0, 1)$ y $u = (-1, 0, 0)$.

Resolución del problema modelo

Para resolver el punto 1, usamos Geogebra. Primero, se ubican los puntos A y B y se dibuja el vector $v = AB$.

Para encontrar el vector v_0, vector que tiene la misma dirección, sentido y módulo que el vector v pero que pasa por $(0, 0)$, primero hay que dibujar la recta paralela a la recta que contiene los puntos A y B pero que pasa por $(0, 0)$, y después construir la circunferencia con origen $(0, 0)$ y radio AB. Luego, se dibuja el vector v_0 como aquel que está en dicha recta paralela y que resulta ser el radio de la circunferencia, en el sentido del vector v.

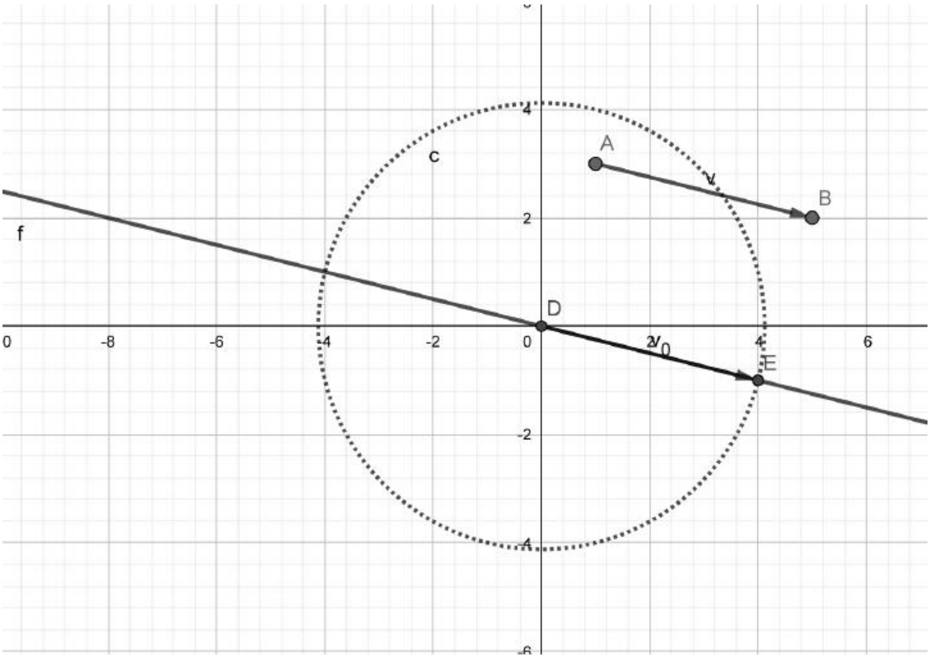


Figura 7.1

Las coordenadas de v_0 son $(4, -1)$. Notemos, además, que $B - A = (4, -1)$. Estas coordenadas corresponden a las componentes del vector v. Las componentes de un vector son las proyecciones de ese vector en cada uno de los ejes cartesianos.

Decimos que los vectores v_0 y v son equivalentes porque tienen la misma dirección, sentido y módulo.

Los estudiantes deben observar que las componentes del vector w son $w_0 = (1, 4)$ y las componentes del vector $u = BA$ son $u_0 = (-4, 1)$.

Para ver cuánto miden los vectores v_0 y u_0, usamos el Teorema de Pitágoras. (Ya se vio este concepto en el caso de números complejos escritos en su forma vectorial.)

Definición 7.1.1. *Sea $v = (a, b)$ un vector en el plano. Se define el módulo o norma del vector v como $||v|| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

En este caso, observamos que las normas de v_0 y u_0 coinciden. Ambos vectores miden $\sqrt{17}$ y ambos vectores tienen la misma dirección y el mismo módulo, pero no coinciden porque tienen sentidos distintos.

Recordemos que $v_0 = (4, -1)$ y $w_0 = (1, 4)$. Observemos que v_0 y w_0 son ortogonales. Existen distintas modos de ver que son perpendiculares u ortogonales. En este caso, se demuestra que son perpendiculares usando el Teorema de Pitágoras.

Teorema. *Dado un triángulo cuyos lados miden a, b, c. Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.*

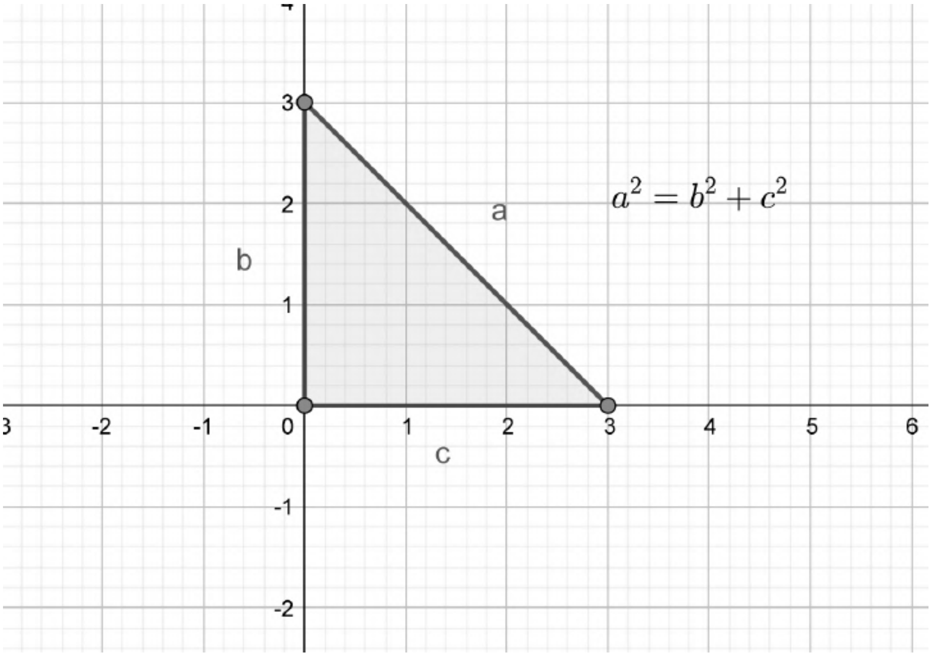


Figura 7.2

Así, si el triángulo cuyos lados miden $||v_0||$, $||w_0||$ y $d = d((1, 4), (4, -1))$, la distancia entre los puntos $(1, 4)$ y $(4, -1)$, satisface el Teorema de Pitágoras, se tiene que el ángulo que forma los vectores v_0 y w_0 es de 90 grados.

Para decidir si el triángulo es rectángulo o no, hay que recurrir a la siguiente definición:

Definición 7.1.2. *Sean $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ dos puntos en el plano. La distancia de los puntos A y B se define como*

$$d(A, B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

Así, tenemos que la distancia entre los puntos $(1, 4)$ y $(4, -1)$ es $d = \sqrt{34}$. Entonces, para ver que el triángulo cuyos lados miden $||v_0||$, $||w_0||$ y d sea un triángulo rectángulo, hay que ver que $||v_0||^2 + ||w_0||^2 = d^2$. Los estudiantes deben verificar que esta igualdad es válida.

En el punto 2, debemos graficar ciertas operaciones con vectores (este tema ya se vio en el capítulo de números complejos). A continuación, graficamos $v + w$ y $v - w$, donde $v = (1, 2)$ y $w = (-1, 2)$.

Empezamos con $v + w$. Para ello, graficamos el paralelogramo de lados no paralelos v y w. Analíticamente, tenemos que $v + w$ es $v + w = (0, 4)$.

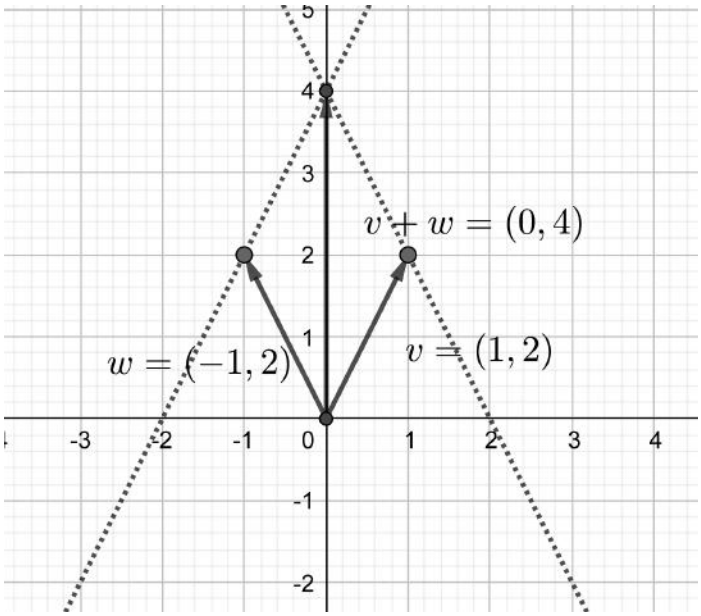


Figura 7.3

Luego, graficamos $v - w$. Como $v - w = v + (-w)$, graficamos el paralelogramo de lados no paralelos v y $-w$. Analíticamente, tenemos que $v - w = (2, 0)$.

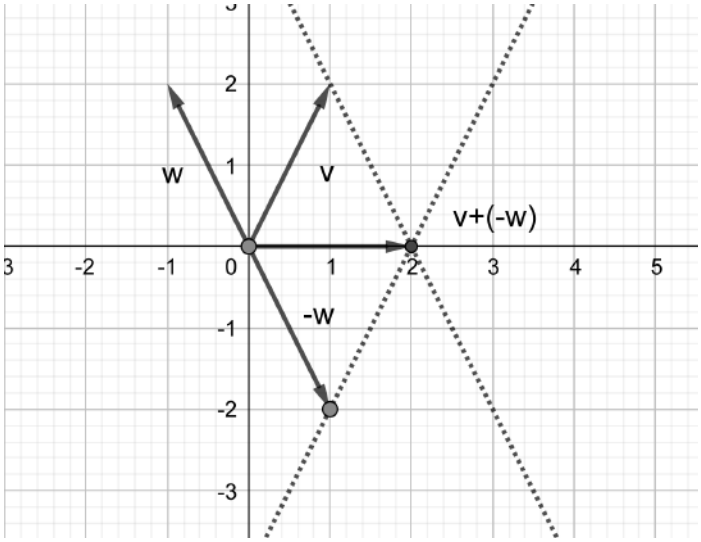


Figura 7.4

En el primer ítem del punto 3, hay que encontrar un vector $v = (x, x+2)$ tal que $v + (1, 1) = (2, 5)$. Este ejercicio usa la definición de igualdad entre vectores: para que dos vectores sean iguales, tienen que ser iguales componente a componente. Para que esto suceda, tenemos que ver que $x + 1 = 2$ y $x + 3 = 4$. Así necesitamos que $x = 1$.

En el ítem b) se pide hallar a y b tales que $2 \cdot (a, -1) + (1, -3) = (5, -b)$. Es una actividad de los estudiantes comprobar que $a = 2$ y $b = 5$.

Para resolver el punto 4 del problema modelo se debe usar Geogebra 3D.

7.1.2. Guía de problemas

Los siguientes ejercicios introducen las nociones de vectores, vectores equivalentes, componentes de un vector, y la suma y resta de vectores de manera gráfica.

Ejercicio 7.1.3. *Sean los vectores* $v := (3, 1)$ *y* $w := (2, -5)$.

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente

$$v + w, \quad -w, \quad , v - w, \frac{1}{2}w, \quad , 2v + 2w, \quad , 2v - 3w$$

c) Representar en el plano 3 vectores de la forma $k_1 v$ y 3 vectores de la forma $k_2 w$ para algunos valores de k_1, k_2 elegidos. ¿Cómo será la representación en el plano de los vectores $k_1 v + k_2 w$?

d) Representar en el plano el conjunto $\{kv : k \in \mathbb{R}\}$ y $\{k_1 v + k_2 w : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 7.1.4. *Hallar, si es posible, $k \in \mathbb{R}$ tal que*

a) $(k - 1, k + 2) = (3, 6)$

b) $k(3, -2) + (-6, 2) = (3, 4)$.

7.2. Operaciones entre vectores

Con el problema modelo se trabajan los conceptos de módulo o norma y ángulo entre vectores, y sus propiedades. También, el producto escalar y el producto vectorial. Algunos de estos conceptos fueron tratados anteriormente.

7.2.1. Problema modelo

1. Sea $v = (1, 2)$ un vector en el plano.
   a) ¿Cuánto vale $||v||$?
   b) Calcular $w = \frac{v}{||v||}$. ¿Qué norma tiene?
   c) Dado $v = (a, b)$. ¿Qué norma tiene el vector $w = \frac{v}{||v||}$?
   d) ¿Qué propiedad se puede mencionar a partir de los cálculos realizados?
2. Dado un vector v en el plano,
   a) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ resulta que la norma de $k \cdot v$ es mayor que la norma de v?
   b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene que la norma de $k \cdot v$ es 1?
3. Sea el vector $v = (1, 2)$.
   a) Encontrar otro vector w perpendicular a v.
   b) ¿Cómo se puede usar el Teorema de Pitágoras para ver que v y w son perpendiculares?
   c) Dados $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$ dos vectores del plano, dar condiciones para que v y w sean perpendiculares a partir de los cálculos realizados arriba.
4. Graficar los vectores $v = (1, 1)$ y $w = (1, \sqrt{3})$.
   a) Hallar los ángulos que forman cada uno de los vectores con el eje horizontal.

b) Utilizar el resultado anterior para hallar el ángulo que forman los vectores v y w.

c) ¿Se puede calcular el ángulo formado por los vectores v y w de otra manera?

5. Determinar un vector unitario en la misma dirección que $v := (3, 4)$.

6. a) Calcular m para que el vector $v := (1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $w := (1, -2, 3)$.

   b) Encontrar un vector ortogonal a $u := (1, -1, 0)$ y $v := (2, 0, 1)$. ¿Cuántos vectores hay de módulo 1?

7. Siendo $u := (1, 2, 3)$ y $v := (1, -2, 3)$ y $w := (1, 5, 2)$. Calcular

$$v \times w, \quad w \times (u + v), \quad (v \times w) \cdot v$$

Resolución del problema modelo

En el punto 1, observemos que $||v|| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Además, $w = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. De esta manera, $||w|| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1$. Así concluimos que $||w|| = 1$. Este tipo de vectores se llaman *vectores unitarios*.

De manera general, es posible enunciar la siguiente propiedad, que los estudiante deben demostrar:

Proposición 7.2.1. *Sea $v = (a, b)$ un vector en el plano, entonces el vector $w = \frac{v}{||v||}$ tiene norma 1, es decir es un vector unitario.*

Resolvemos el punto 2. Si tenemos un vector v de medida a, entonces el vector $k \cdot v$ es un vector de norma $|k| \cdot a$. Por lo tanto, para que el vector $k \cdot v$ tenga norma mayor que el vector v, es necesario que $k \in \mathbb{R}$ tal que $k > 1$ o $k < 1$. Para que la norma de $k \cdot v$ tenga norma 1, es necesario que $k = \frac{1}{||v||}$ o $k = -\frac{1}{||v||}$.

Resolvemos el punto 3 usando Geogebra. Se dibuja el vector $v = (1, 2)$ y un vector ortogonal, al que llamamos $w = (-2, 1)$ (perpendicular a él).

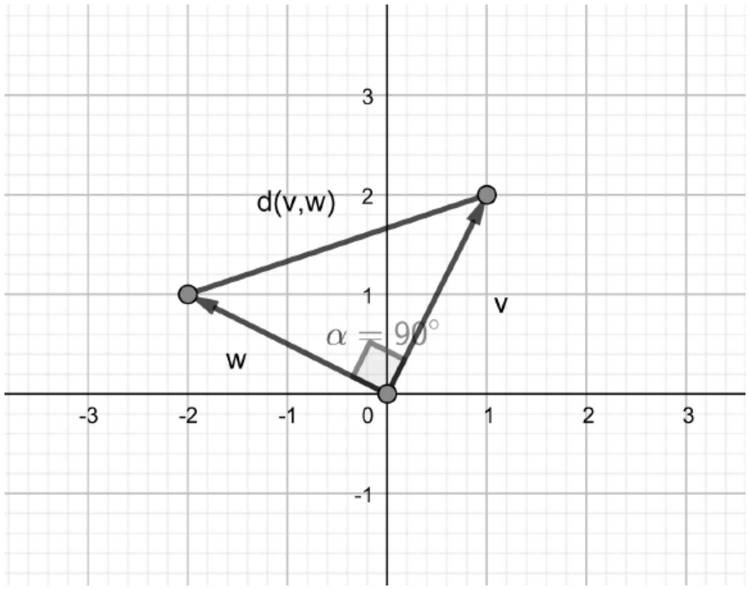


Figura 7.5

Para ver que son ortogonales, tenemos que ver que $d(v,w)^2 = ||v||^2 + ||w||^2$. Es tarea de los estudiantes verificar esta igualdad.

De manera más general, para ver que dos vectores $v = (a,b)$ y $w = (c,d)$ son perpendiculares u ortogonales, hay que probar que

$$d(v,w)^2 = ||v||^2 + ||w||^2. \tag{7.1}$$

Por un lado,

$$d(u,v)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2(a \cdot c + b \cdot d).$$

Por otro lado,

$$||v||^2 = a^2 + b^2, \quad ||w||^2 = c^2 + d^2.$$

Igualando estas igualdades con (7.1), deducimos que

$$a \cdot c + b \cdot d = 0.$$

De aquí se puede dar la siguiente definición:

Definición 7.2.2. *Sean $v = (a,b)$ y $w = (c,d)$ dos vectores. Definimos el producto interno entre v y w y denotamos con $v \cdot w$ al número*

$$v \cdot w = a \cdot c + b \cdot d.$$

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 7.2.3. *Sean v y w dos vectores en el plano o el espacio. Los vectores v y w son perpendiculares u ortogonales si y solo si $v \cdot w = 0$.*

Para resolver el punto 4, comenzamos calculando el ángulo α entre el vector v y el eje horizontal. En este caso, $\alpha = 45^0$ y el ángulo β entre w y el eje horizontal es $\beta = 60^0$. El ángulo γ entre v y w es $\gamma = \beta - \alpha = 15^0$. Para encontrar estos ángulos se puede usar Geogebra.

El ángulo γ formado por los vectores v y w también se puede calcular usando la definición que habitualmente se ve en clase:

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{||v||||w||} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

En este sentido, hay que resolver una ecuación en la que la incógnita es un ángulo. Usando Geogebra, Vista Cas, se llega a que dicho ángulo es 15^o. También se lo puede encontrar usando la calculadora.

En el punto 5, se pide encontrar todos los w de norma 1 en la dirección de v. Como $||v|| = 5$, entonces, $w = \frac{v}{5}$ o $w = -\frac{v}{5}$.

En el punto 6, debemos hallar m tal que $v = (1, 3, m)$ sea ortogonal a $w = (1, -2, 3)$. Para ello, tiene que ocurrir que $v \cdot w = 0$. Por lo tanto, deducimos que $1 - 6 + 3m = 0$. Concluimos que $m = \frac{5}{3}$.

En el ítem 6 b), buscamos un vector $w = (a, b, c)$ tal que $w \cdot v = 0$ y tal que $w \cdot u = 0$. En este sentido, tenemos, por un lado que, $a - b = 0$, y por otro lado, que $2a + c = 0$. Así, deducimos que $a = b$ y $c = -2a$. Por lo tanto, los vectores ortogonales a u y v son de la forma $w = (a, a, -2a)$. Debemos hallar ahora aquellos vectores de norma 1: los dos vectores ortogonales a u y v de norma 1 son $\pm\frac{w}{||w||}$, donde $||w|| = \sqrt{6a^2}$.

Estos vectores también se pueden calcular usando la siguiente definición:

Definición 7.2.4. *Sean $u = (a, b, c)$ y $v = (d, e, f)$ dos vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se define el producto vectorial entre u y v como*

$$u \times v = \left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \right).$$

El producto vectorial $u \times v$ es un vector ortogonal a u y a v. Así, por la definición, se tiene que $w = u \times v = (-1, -1, 2)$. Este vector w es ortogonal a u y v. A partir de este vector, dejamos a cargo del estudiante que encuentre los dos vectores ortogonales a u y a v de norma 1.

En Geogebra podemos calcular w, usando el comando $Productovectorial[u, v]$. A continuación observamos el siguiente dibujo, en donde se representa el vector w.

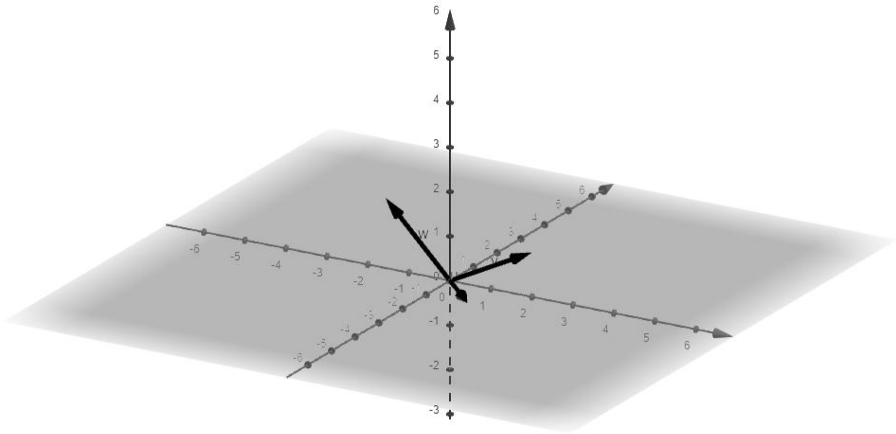


Figura 7.6

Por último, en el punto 7 debemos calcular ciertas operaciones y encontrar nuevos vectores. Es tarea de los estudiantes comprobar que si $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, -2, 3)$ y $w = (1, 5, 2)$, entonces $v \times w = (-19, 1, 7)$, $w \times (u + v) = (30, -2, -10)$ y $(v \times w) \cdot v = 0$.

7.2.2. Guía de problemas

Con los ejercicios que siguen se trabaja operaciones con vectores.

Ejercicio 7.2.5. *a) Dados los vectores* $v := (3 - 4)$ *y* $w := (1, 2)$, *calcular las siguientes normas:*

$$||v||, \quad ||w||, \quad ||v + w||, \quad ||v|| + ||w||, \quad ||2v||.$$

A partir de algunos cálculos realizados anteriormente, ¿se puede decir cuánto valen las normas de $|| - 2v||$, $||\frac{v}{||v||}||$*?*

b) ¿Qué figura geométrica representa todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $||(x, y)|| = 5$*?*

c) *Hallar todos los vectores de la forma* $v := (4, k)$ *tales que* $||v|| = 5$. *¿Estos vectores se encuentran en el conjunto anterior?*

Ejercicio 7.2.6. *a)* *Dados los puntos* $A := (-1, 3)$, $B := (-2, -3)$ *y* $C := (-2, 1)$, *¿cuánto miden los segmentos* AB, BC *y* AC*? ¿Cuánto vale el perímetro del triángulo formado por los segmentos anteriores?*

b) *Dar cinco puntos del plano que estén a distancia* 2 *del punto* $A := (1, -1)$.

c) *Decidir si existe algún punto del eje* X *que esté a distancia* 2 *del punto* $A := (1, 5)$.

Ejercicio 7.2.7. *Dados los vectores* $v = (1, 2)$, $w = (-1, 5)$ *y* $u = (3, 1)$, *calcular:*

$$v \cdot w, \quad v \cdot u, \quad v \cdot (w + u), \quad v \cdot (2w), \quad (5v) \cdot u, \quad v \cdot (2w - 3u).$$

Ejercicio 7.2.8. *En cada caso, graficar los vectores, calcular el producto interno indicado y determinar si los vectores son ortogonales.*

a) $v := (1, -1)$ *y* $w := (2, 4)$

b) $v := (1, 3)$ *y* $w := (-6, 2)$

c) $v := (-1, 0)$ *y* $w := (0, 1)$

Ejercicio 7.2.9. *Hallar tres vectores que sean ortogonales a* $(5, -3)$ *y que tengan diferentes longitudes. Graficar en el plano.*

Ejercicio 7.2.10. *Determinar los valores de* k *para los cuales:*

a) $||v|| = 1$ *si el vector* v *es* $v = (1, k, 0)$.

b) $d(A, B) = 2$ *si los puntos son* $A = (1, 1, 1)$ *y* $B = (k, -k, 2)$.

Ejercicio 7.2.11. *Una mosca se para en la pared de un cuarto. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. La mosca está parada en el punto que tiene coordenadas* $(1, 2)$ *(en metros).*

a) *¿A qué distancia está la mosca de la esquina del cuarto?*

b) *Si la pared mide* 4 *m de ancho y* 3 *m de alto, ¿a qué distancia se encuentra del resto de las esquinas?*

Ejercicio 7.2.12. *Sean* $v := (1,1,1)$*,* $w := (1,-1,0)$ $u := (2,-1,-1)$*. Calcular*

$$v \cdot w, \quad v \cdot (w+u), \quad v \cdot (3w - 5u).$$

Ejercicio 7.2.13. *Dados los vectores* $v := (1,-2)$ *y* $w := (3,4)$*, hallar todos los vectores* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $v \cdot (x,y) = v \cdot w$*.*

Ejercicio 7.2.14. *a) Encontrar los vectores ortogonales a* $(0,0,1)$ *de longitud* 2*.*

b) Encontrar los vectores ortogonales a $v := (1,2,-1)$ *y a* $w := (2,0,1)$*.*

Ejercicio 7.2.15. *Hallar el ángulo que forman los vectores* v *y* w *en cada uno de los siguientes casos:*

a) $v := (1,2)$ *y* $w := (-2,1)$

b) $v := (2,1,1)$ *y* $w := (1,-1,2)$*.*

Ejercicio 7.2.16. *¿Son* $v := (1,2,3)$ *y* $w := (2,-2,1)$ *ortogonales? Si no lo son, hallar el ángulo que forman.*

Ejercicio 7.2.17. *¿Cuántos vectores existen que formen un ángulo de* 60^o *con el vector* $v = (2,0)$ *y que tengan norma* 8*?*

Ejercicio 7.2.18. *Sean* $v := (1,2,3)$*,* $w := (-1,2,3)$ *y* $u := (1,2,0)$*. Calcular*

$$v \times w, \quad v \times (u+w), \quad (v \times u) \cdot u, \quad (v \times w) \cdot (u \times w), \quad (v \times w) \times u.$$

Ejercicio 7.2.19. *Resolver las consignas:*

a) Calcular el área del triángulo con vértices $A := (1,-2,3)$*,* $B := (-3,1,4)$ *y* $C := (0,4,3)$*.*

b) Calcular el área del paralelogramo con lados adyacentes a los vectores $u := (1,3,-2)$ *y* $v := (3,-1,-1)$*.*

7.2.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

En el ejercicio 7.2.6 a), debemos calcular las medidas de los segmentos AB, BC y AC. Para ello, calculamos la distancia $d(A,B)$ entre A y B, la distancia $d(B,C)$ entre B y C, y la distancia $d(A,C)$ entre A y C.

Para calcular la distancia entre A y B, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$d(A,B) = \sqrt{(-2+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{37}.$$

De la misma manera, $d(B,C) = 4$, y $d(A,C) = \sqrt{5}$. Así, el perímetro del triángulo es $\sqrt{37} + 4 + \sqrt{5}$.

A continuación, resolvemos el ejercicio 7.2.11. Supongamos que la mosca está parada en una pared del cuarto, que la esquina inferior de esa pared es el punto $(0,0)$ y las coordenadas en donde está apoyada dicha mosca son $(1,2)$. Queremos encontrar la distancia de la mosca al punto $(0,0)$.

Observemos que esta distancia $D := d((0,0),(1,2))$ se calcula de la siguiente manera:

$$D := \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Luego hay que averiguar a qué distancia de cada esquina se encuentra la mosca.

Para visualizar esa situación, se realiza un gráfico en Geogebra.

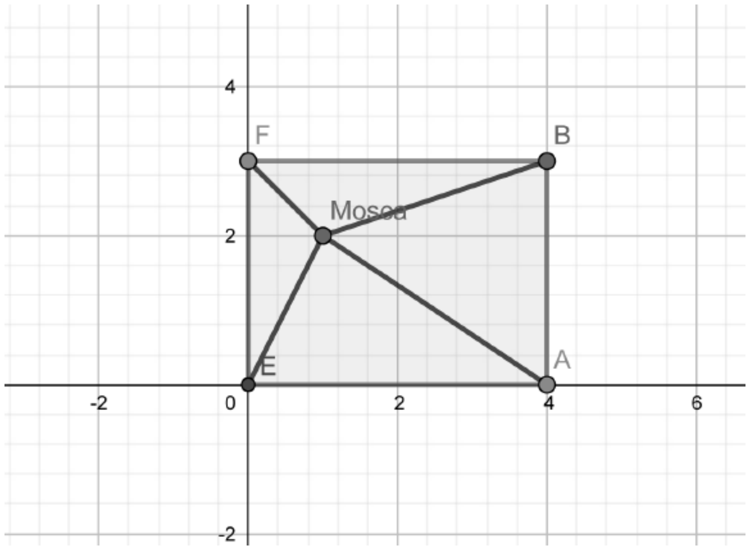


Figura 7.7

Llamemos a los puntos de las esquinas de la pared de la siguiente manera:

$$F = (0,3) \quad B = (4,3) \quad A = (4,0) \quad E = (0,0).$$

Nombremos al punto de ubicación de la mosca $M = (1,2)$.

Se pide calcular las distancias entre F y M, entre B y M, entre M y A. De manera ilustrativa, calculamos la distancia entre B y M. Las otras distancias quedan para que las calculen los estudiantes.

$$d(B,M) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Por último, en el ejercicio 7.2.16, para averiguar si v y w son ortogonales, calculamos el producto interno entre v y w:

$$v \cdot w = 2 - 4 + 2 = 1.$$

Como este producto interno es distinto de cero, los vectores no son ortogonales.

También debemos calcular el ángulo γ entre los vectores v y w. Más precisamente,

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{||v||||w||} = \frac{1}{3\sqrt{14}}.$$

Es tarea de los estudiantes encontrar ese ángulo.

7.3. Rectas en el plano y espacio

Este problema modelo trabaja con los conceptos de rectas en el plano y el espacio, y sus representaciones.

7.3.1. Problema modelo

1. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$, ¿qué sucede cuando se lo multiplica por distintos valores reales $\lambda \in \mathbb{R}$? Construir ejemplos.
2. Graficar e indicar qué representan los puntos del plano que son de la forma $\lambda \cdot (1, 2) + (0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿El punto $(2, 6)$ pertenece al gráfico? ¿Por qué? ¿Y el punto $(1, 3)$?
3. a) ¿Qué sucede con la recta de ecuación $(x, y) = k \cdot (1, 3)$ con $k \in \mathbb{R}$ cuando se le suma el vector $(-1, 2)$ de modo que la nueva ecuación sea $(x, y) = k \cdot (1, 3) + (-1, 2)$?
   b) ¿Se puede asegurar que la recta L de ecuación $(x, y) = k \cdot (1, 3) + (-1, 2)$ pasa por el punto $(1, 3)$? ¿Y por el punto $(-1, 2)$?
4. Sean los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 5)$ en $\mathbb{R}^2$, la recta L que pasa por P, Q y el vector $v = PQ$.
   a) Dado el vector v_0 paralelo al vector v, pero con origen en el origen de coordenadas, ¿cómo son la recta L y el vector v_0?
   b) Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Un punto R de $\mathbb{R}^2$ pertenece a la recta L si y solo si el vector formado por los puntos P y R es paralelo al vector v_0".
5. Sea la recta L que pasa por los puntos $P = (1, 3, -2)$ y $Q = (2, 1, -2)$. Hallar la ecuación que pasa por el punto P en la dirección del vector $v = PQ$. Esta forma

de escribir la recta se llama *forma vectorial de la recta*. ¿Existen otras maneras de describir la recta L?

Resolución del problema modelo

A partir de ejemplos y recordando lo visto en el capítulo de vectores, en el punto 1 se observa que si multiplicamos λ por un vector fijo $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot v$ describe una recta que pasa por el origen de coordenadas. Se espera que el estudiante realice los gráficos con Geogebra para ver este efecto, para ello se puede usar la herramienta del deslizador.

El punto 2 permite observar que si multiplicamos un vector $(1, 2)$ que pasa por el origen de coordenadas por λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot (1, 2)$ describe una recta que pasa por el origen de coordenadas. En cambio, si le sumamos al conjunto de vectores $\lambda \cdot (1, 2)$ el punto $(0, 1)$, entonces $\lambda \cdot (1, 2) + (0, 1)$ describe una recta que pasa por el punto $(0, 1)$ en la dirección del vector $(1, 2)$.

En el siguiente gráfico podemos encontrar la descripción de la recta $L := \lambda \cdot (1, 2) + (0, 1)$. Para ello, creamos en la barra de entrada el punto $A = (1, 2)$. Luego, creamos un deslizador, que permite graficar los puntos $B := \lambda \cdot A$. También creamos el punto $P = (0, 1)$. Por último, creamos los puntos $C := \lambda \cdot A + P$. Si queremos visualizar la recta L, usamos la herramienta “recta que pasa por dos puntos”; en este caso, pasa por los puntos C y P. La recta L es la recta $L : \lambda v + P$.

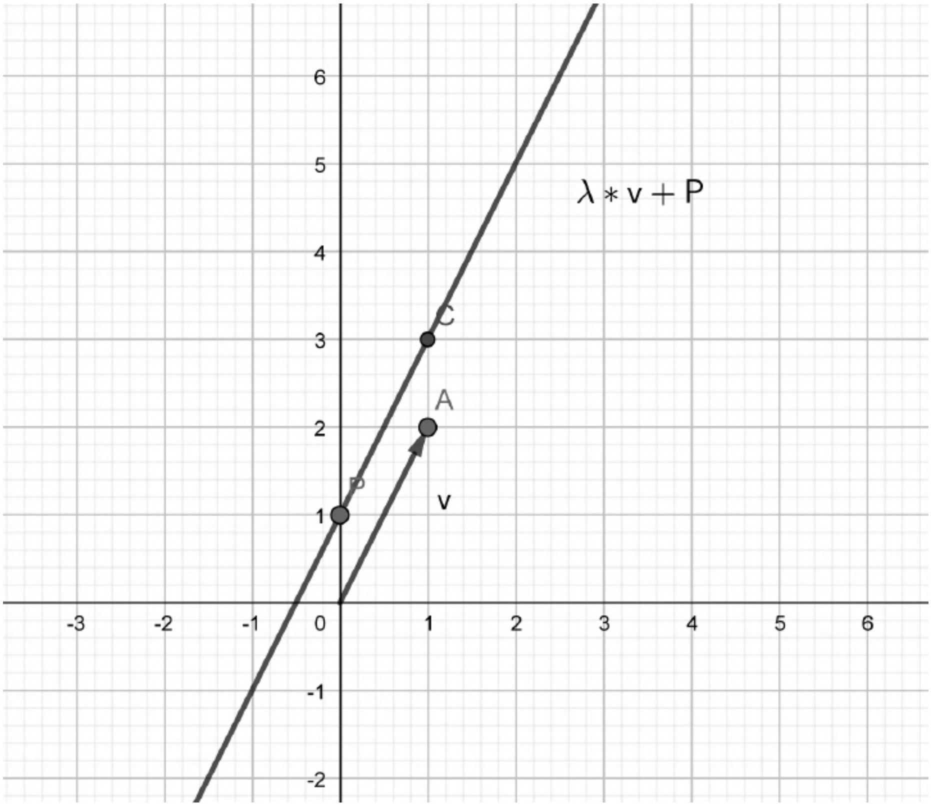


Figura 7.8

En el mismo ejercicio, debemos averiguar si el punto $(2, 6)$ pertenece a la recta. Para ello, hay que encontrar algún valor de λ tal que

$$\lambda \cdot (1, 2) + (0, 1) = (2, 6). \tag{7.2}$$

Ya se trabajo antes con este tipo de problemas. Queda a cargo de los estudiantes ver que no existe ningún λ de manera que se cumpla la igualdad de (7.2). Esto quiere decir que el punto $(2, 6)$ no pertenece a la recta L. En cambio, el punto $(1, 3)$ pertenece a L, tomando $\lambda := 1$.

En el punto 3 a), consideremos la recta $L_1 := (x, y) = kv$, donde $v = (1, 3)$. Si sumamos el vector $w = (-1, 2)$ con todos los vectores que se encuentran en la recta L_1, obtenemos un conjunto de vectores de la forma $k \cdot (1, 3) + (-1, 2)$. Los puntos finales de esos vectores describen una recta que es paralela a L_1, pero que pasa por el punto $P = (-1, 2)$. Estas observaciones se ven en la siguiente gráfica.

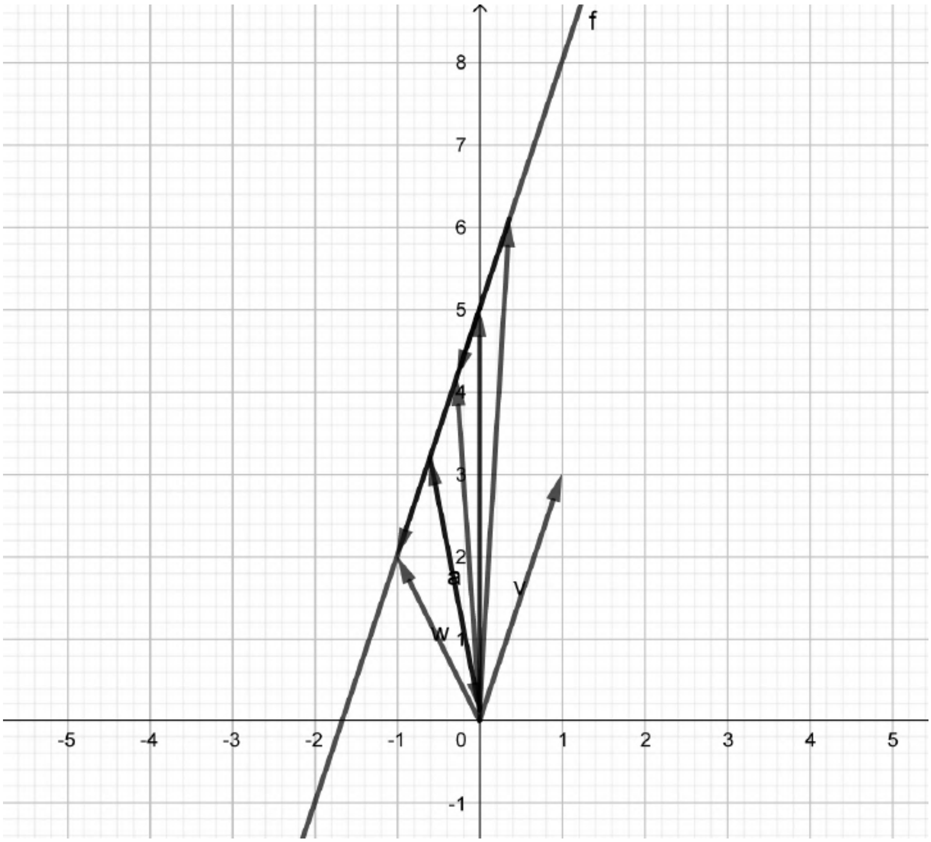


Figura 7.9

La recta L es la recta paralela a la recta L_1, pero que pasa por el punto $(-1, 2)$. Observemos que la dirección de L es el vector $(1, 3)$, pero no pasa por ese punto.

El ítem 4 tiene por finalidad construir la recta L que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 5)$, de manera vectorial. Primero, consideramos el vector $v = PQ$. Si lo trasladamos al origen de coordenadas, tenemos el vector $v_0 = (2, 3)$. Al graficar con Geogebra la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 5)$ y el vector v_0, se observa que son paralelas.

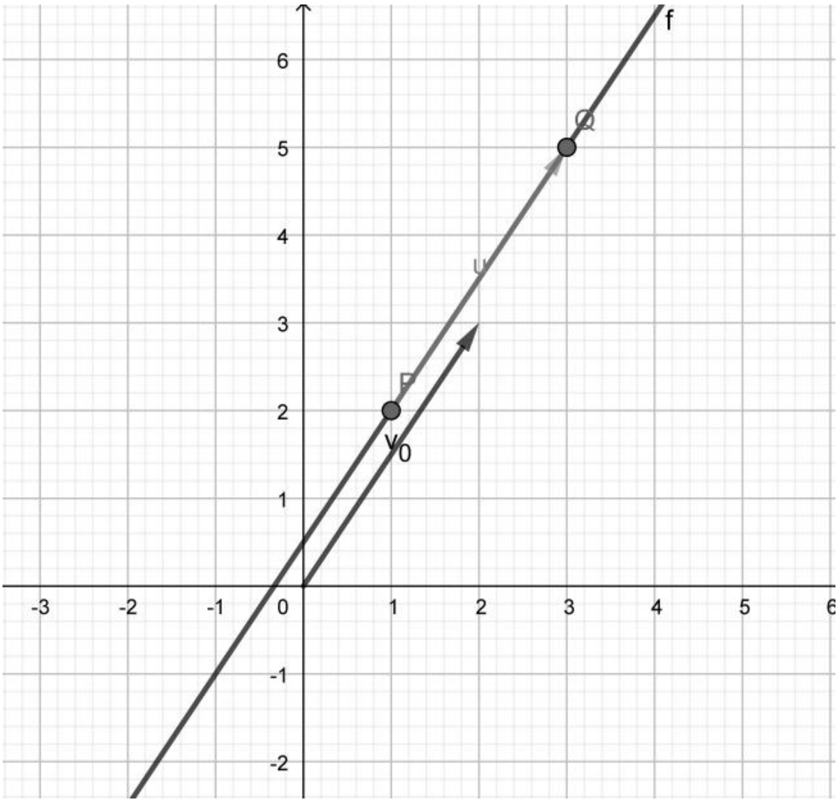


Figura 7.10

La afirmación del ítem b es verdadera. Más aún, esta afirmación permite describir la recta que pasa por los puntos P y Q de manera vectorial.

Observemos que si $R = (x, y)$, el vector $w = PR$, trasladado al origen de coordenadas es $w_0 = R - P = (x, y) - (1, 2)$. Luego, para que w_0 sea paralelo a $v_0 := (2, 3)$, tenemos que pedir $w_0 = \lambda \cdot v_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, que es lo mismo que $(x, y) - (1, 2) = \lambda \cdot v_0$, es decir

$$(x, y) = \lambda(2, 3) + (1, 2). \tag{7.3}$$

De esta manera, los puntos (x, y) de la recta L se pueden decribir mediante la ecuación (7.3).

En el punto 5, se pide escribir la recta $L \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por los punto $P = (1, 3, -2)$ y $Q = (2, 1, -2)$. Como L pasa por el punto P en la dirección de $v = PQ$, por lo anterior, tenemos que la recta L está descripta por los puntos (x, y, z) tales que $(x, y, z) = kv_0 + P$, donde $v_0 = Q - P$ y $k \in \mathbb{R}$. Concluimos así que L está descripta como

$$L := (x, y, z) = k \cdot (1, -2, 0) + (1, 3, -2).$$

La recta L también se puede escribir como todos los puntos (x, y, z) tales que $x = k + 1$, $y = -2k + 3$ y $z = -2$. Así, concluimos que otra manera de describir a la recta L es mediante los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $y = -2x + 5$, $z = 2$, es decir, los puntos de la forma $(x, -2x + 5, 2)$, con $x \in \mathbb{R}$.

7.3.2. Guía de problemas

En esta sección, los ejercicios están referidos a rectas en el plano y espacio.

Ejercicio 7.3.1. *a) Encontrar la recta L en* $\mathbb{R}^2$ *que pasa por los puntos* $(1, -1)$ *y* $(-2, 2)$*, indicando su vector director.*

b) Indicar si el punto P pertenece o no a la recta L, para cada uno de los siguientes puntos $P = (2, 1)$, $\quad P = (0, 0)$, $\quad P = (-2, 3)$*. Justificar la afirmación dada.*

Ejercicio 7.3.2. *Encontrar un vector* (a, b)*, distinto a* $(1, 2)$*, de manera que la recta de ecuación* $(x, y) = k \cdot (1, 3) + (a, b)$ *pase por el punto* $(1, 2)$*.*

Ejercicio 7.3.3. *Graficar una recta en la dirección del vector* $(1, 2, -1)$*, pero que pase por el punto* $(1, 1, 1)$*. ¿De cuántas maneras se puede hacer? Escribir la ecuación vectorial de esa recta.*

7.4. Planos en el espacio

Este problema modelo trabaja con la noción de plano en el espacio, que ya apareció en otros capítulos. Aquí se le dará un enfoque geométrico usando vectores directores.

7.4.1. Problema modelo

1. Para construir una recta en $\mathbb{R}^3$ se necesitan dos puntos. ¿Cuántos puntos es necesario conocer para construir un plano? ¿Cómo deben ser dichos puntos? ¿Pueden pertenecer a una misma recta?

2. a) Proponer un vector perpendicular a $(1,3,1)$. ¿Cuántos más hay? ¿Cómo se los puede describir geométricamente?
   b) Proponer un vector perpendicular a $(1,3,1)$ y $(2,1,2)$. ¿Cuántos más hay ? ¿Cómo se los puede describir geométricamente?
3. Sean los puntos $P=(0,0,-1)$, $Q=(1,2,1)$ y $R=(1,4,4)$ en $\mathbb{R}^3$.
   a) Demostrar que P, Q y R no pueden estar en una misma recta. Observar que estos puntos pertenecen a un plano, que llamamos Π.
   b) Considerar los vectores $v=PQ$ y $w=PR$ y calcular un vector ortogonal a v y a w, llamarlo N.
   c) Si se considera otro punto cualquiera $S=(x,y,z)$ del plano Π, ¿qué tiene que ocurrir con el vector $u=PS$ y N?
   d) A partir de la solución del ítem anterior, dar una descripción analítica del plano Π.
4. Sean los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen con la siguiente ecuación:

$$(x,y,z)=\alpha(1,0,-1)+\beta(-3,1,2) \tag{7.4}$$

   a) Proponer dos puntos que pertenezcan a (7.4).
   b) Encontrar un vector perpendicular a cualquier vector de (7.4).
   c) ¿Cómo se pueden trasladar todos los puntos de (7.4) y que pasen por el punto $(0,0,1)$?

Resolución del problema modelo

El ejercicio del punto 1 es exploratorio, ya que permite construir mediante ejemplos la idea de que no es posible describir un plano en $\mathbb{R}^3$ a partir de dos puntos pero, en cambio, a partir de tres puntos, a veces es posible describir un plano (el plano que pasa por los tres puntos). Hay que notar que esos puntos no pueden pertenecer a la misma recta, es decir, no deben ser colineales.

El ejercicio del punto 2 introduce la noción de plano en $\mathbb{R}^3$ de manera vectorial. Si queremos proponer un vector perpendicular al vector $(1,3,1)$, hay que pedir que los vectores (x,y,z) cumplan que

$$(x,y,z)\cdot(1,3,1)=0.$$

Esto quiere decir que todos los vectores que sean perpendiculares con $(1,3,1)$ deben cumplir con la ecuación $x+3y+z=0$. Graficando en Geogebra, observamos que estos puntos describen un plano en $\mathbb{R}^3$.

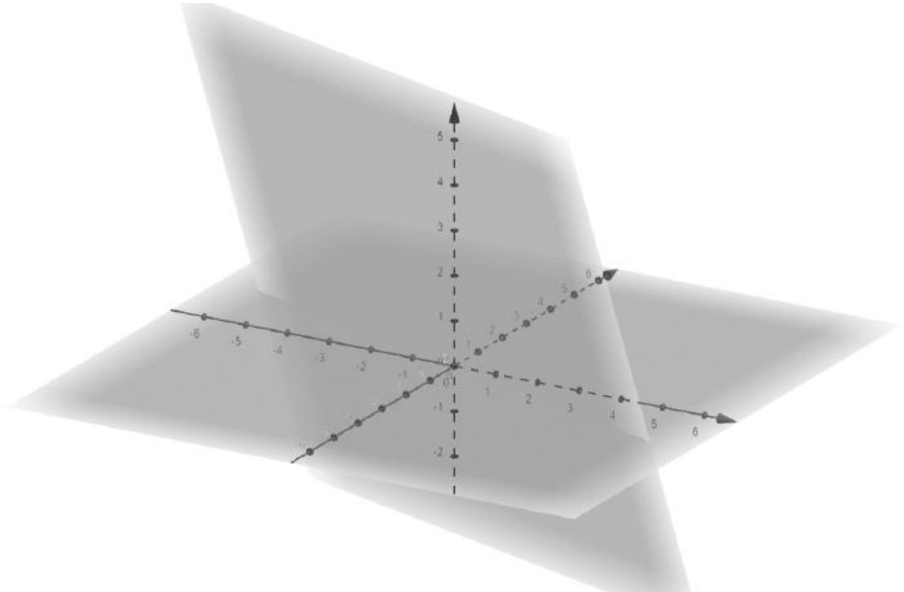


Figura 7.11

Por otro lado, los vectores ortogonales a $(1,3,1)$ y $(2,1,2)$ son múltiplos del vector $(1,3,1)\times(2,1,2)$, es decir, son de la forma $k\cdot(5,0,-5)$, con $k\in\mathbb{R}$.

El punto 3 permite describir la noción de plano en $\mathbb{R}^3$ de manera vectorial. En el ítem a) hay que demostrar que los puntos P, Q y R no están en la misma recta. Para ello, podemos ver que el determinante formado por la matriz cuyas filas son los puntos P, Q y R es no nulo. ¿Por qué basta con esta cuenta para determinar que los tres puntos no están en la misma recta? ¿Por qué necesitamos esta información para describir un plano?

En este caso, tenemos que

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = -2.$$

En el ítem b), consideramos los vectores $v = PQ$ y $w = PR$ trasladados al origen de coordenadas; por un abuso de notación llamaremos a estos vectores v y w, respectivamente. Luego, calculamos el vector $v\times w$ ortogonal a v y w. Más precisamente, dados $v=(1,2,2)$ y $w=(1,4,5)$, tenemos que $N := v\times w = (2,-3,2)$.

Hasta aquí se puede observar que los vectores v y w están en el plano Π, ambos empiezan en el punto P. Además, podemos ver que el vector N es perpendicular a los vectores v y w.

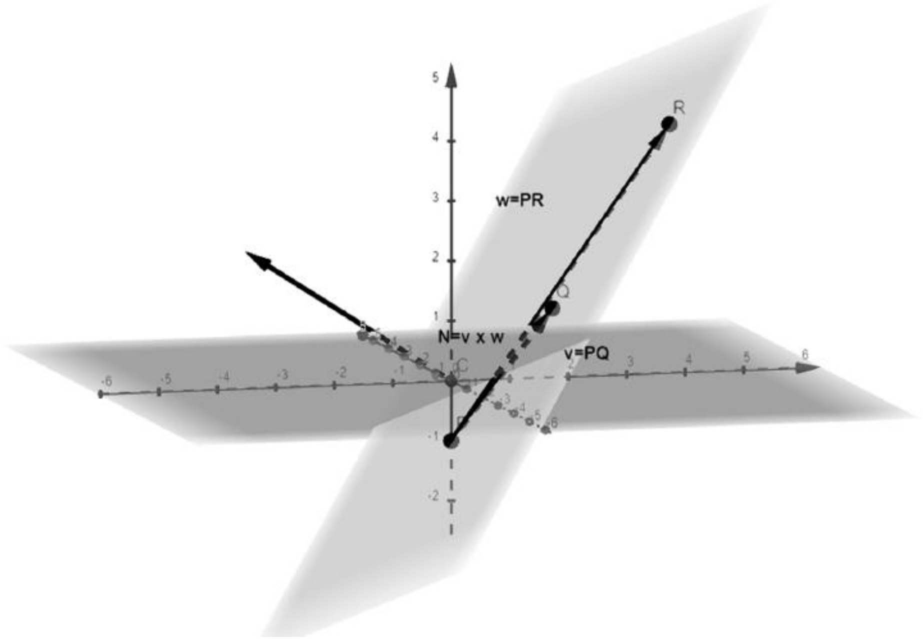


Figura 7.12

Si tomamos otro vector que empieza en el punto P, por ejemplo, PS con $S = (x, y, z)$, tenemos que el vector PS es perpendicular a N. Esto último permite describir el plano Π. Más precisamente, como $S-P$ es perpendicular a $N = (2, -3, 2)$, tenemos que

$$((x, y, z) - (0, 0, -1)) \cdot (2, -3, 2) = 0.$$

Dicho de otra manera, el plano Π puede describirse mediante la ecuación $2x - 3y + 2z = -2$.

Finalmente, si se quiere proponer dos puntos de la ecuación (7.4), basta con tomar distintos valores de α y β. Observemos que es un plano que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$. Para encontrar un vector perpendicular a cualquier vector de (7.4), basta con encontrar un vector ortogonal a $(1, 0, -1)$ y $(-3, 1, 2)$. Y para encontrar todos los puntos de (7.4), pero que pasen por $(0, 0, 1)$, basta escribir

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2) + (0, 0, 1),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Este es un plano con vectores directores $(1, 0, -1)$ y $(-3, 1, 2)$ y que pasa por $(0, 0, 1)$.

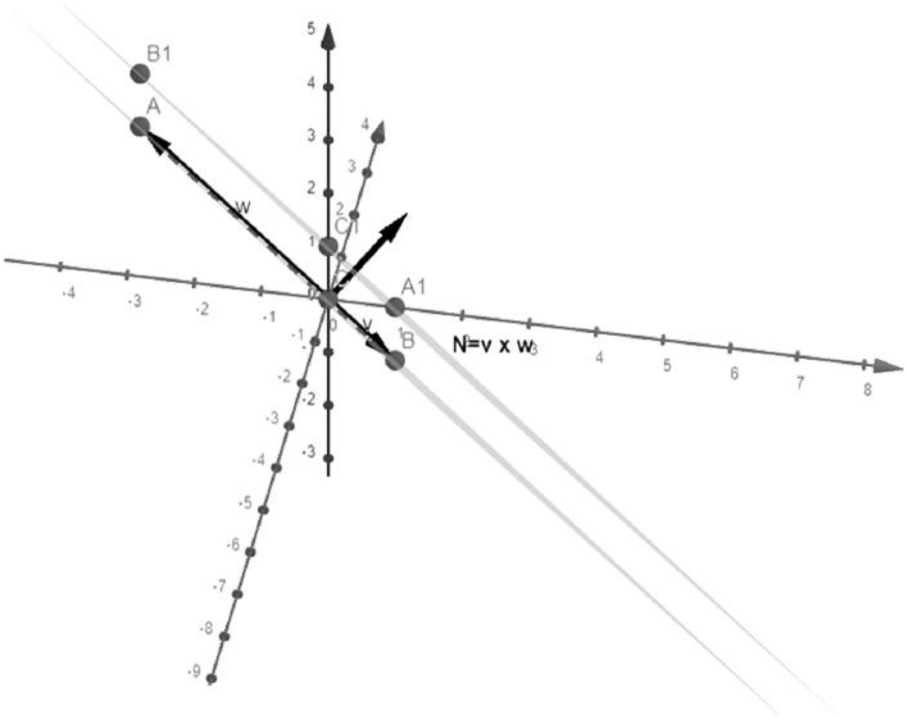


Figura 7.13

El plano $\alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2)$ es paralelo al plano $\alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2) + (0, 0, 1)$.

7.4.2. Guía de problemas

En esta sección se incluyen ejercicios sobre planos en el espacio.

Ejercicio 7.4.1. *Sea* Π *el plano de ecuación* $(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(-3, 0, 2) + (0, 0, 1)$.

1. *Proponer dos puntos que pertenezcan a* Π *y dos puntos que no pertenezcan a* Π.
2. *Encontrar un vector perpendicular a cualquier vector de* Π.

Ejercicio 7.4.2. *Encontrar un plano que pase por los puntos* $P = (1, 1, 1)$*,* $Q = (2, 1, 2)$ *y* $R = (0, 2, -1)$*.*

Ejercicio 7.4.3. *Sean* $A = (1, 1, 1)$*,* $B = (1, 1, 2)$ *y* $C = (0, -1, -1)$ *tres puntos de* $\mathbb{R}^3$*.*

1. *Encontrar un plano que pase por los puntos* A*,* B *y* C*.*
2. *Hallar* k *para que el punto* $D = (k, 0, 0)$ *pertenezca a dicho plano.*

7.4.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

Resolvemos el ejercicio 7.4.1. Para proponer puntos de Π basta encontrar α, β específicos. Por ejemplo, si $\alpha = \beta = 0$, entonces un punto de π es $P = (0, 0, 1)$. Otro punto que es posible encontrar resulta tomando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Más precisamente, $Q = (1, 1, 0) \in \Pi$. Es tarea de los estudiantes encontrar puntos que no pertenecen al plano.

Por otro lado, tenemos que los vectores directores de Π son $(1, 1, -1)$ y $(-3, 0, 2)$. Un vector perpendicular a estos dos vectores es $(1, 1, -1) \times (-3, 0, 2) = (2, 1, 3)$. El vector $(2, 1, 3)$ es perpendicular a cualquier vector de Π. En efecto, un vector cualquiera de Π es de la forma PR, donde $R = (\alpha - 3\beta, \alpha, -\alpha + 2\beta + 1)$. Notemos que $R - P$ es ortogonal a $(2, 1, 3)$.

Por último, en el ejercicio 7.4.3 tenemos que encontrar un plano Π que contenga a los puntos A, B y C. Dados $v = AB$ y $w = AC$ y sea $N = AB \times AC = (B - A) \times (C - A)$.

Un punto $(x, y, z) \in \Pi$ si y solo si

$$((x, y, z) - A) \cdot N = 0.$$

Como $N = (2, 1, 0)$, entonces $(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (2, 1, 0) = 0$. Por lo tanto, los puntos del plano están descriptos por la ecuación

$$2x - y = 1.$$

Otra manera de describir este plano es a través de los vectores directores. Sean $v = B - A = (0, 0, 1)$ y $w = C - A = (-1, -2, -2)$. Entonces, el plano Π está descrito por los puntos

$$(x, y, z) = \alpha v + \beta w + A.$$

Si se quiere encontrar k para que el punto D pertenezca al plano, tiene que cumplir que $2k = 1$, es decir, $k = 1/2$.

7.5. Paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos

El objetivo del problema modelo que sigue es estudiar las posiciones relativas a dos rectas en el plano y el espacio. También, averiguar cuándo dos planos en el espacio se intersecan y, si lo hacen, cuál es su intersección. Por último, qué resulta de la intersección entre un plano y una recta en el espacio.

7.5.1. Problema modelo

1. Sean $L_1 : (x, y, z) = (-1, 3, 1) + \alpha(4, 1, 0)$ y $L_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \beta(12, 6, 3)$ dos rectas en el espacio. ¿Se intersecan? Si lo hacen, ¿en qué punto? Un soporte gráfico puede servir de guía.
2. Sean las siguientes tres rectas definidas en el espacio $L_1 : (x, y, z) = \alpha(3, 2, 1) + (-1, -2, 1)$, $L_2 : (x, y, z) = \beta(6, 4, 2) + (1, 3, -2)$ y $L_3 : (x, y, z) = \gamma(-1, 0, 3) + (0, 2, -1)$.
   a) Decidir si L_1 es paralela a L_2.
   b) Dar un argumento de por qué L_1 tiene que ser perpendicular a L_3.
3. Describir de manera algorítmica, en pasos ordenados, cómo se puede encontrar una recta escrita en forma vectorial de manera que sea perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -2, 2)$, y que pase por el punto $(1, 1, 2)$.
4. Hallar el plano Π que contiene a la recta $L : (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y el punto $P = (0, 0, -1)$.
5. Encontrar el plano Π_1 que es perpendicular a $L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y que contiene a $P = (1, 1, 1)$. ¿Y si el plano es paralelo a L_1 y pasa por P?
6. Calcular el punto de intersección entre las rectas $L : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y $\Pi : x - 2y + 3z = 1$.

Resolución del problema modelo

En el punto 1, hay que averiguar si las rectas L_1 y L_2 se intersecan o no.

Observemos, primero, que el vector director de L_1 es $v = (4, 1, 0)$, mientras que el vector director de L_2 es $w = (12, 6, 3)$.

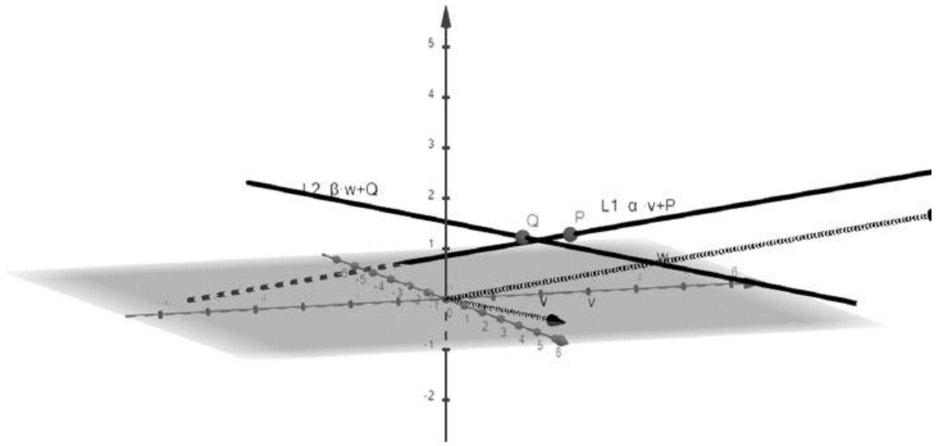


Figura 7.14

Como los vectores directores no son paralelos ni perpendiculares, entonces estas dos rectas no pueden ser paralelas ni perpendiculares. A primera vista, pareciera por el gráfico que estas dos rectas se intersecan. Pero ¿estas rectas, efectivamente, se intersecan en un punto?

Por un lado, los puntos de L_1 son de la forma $(4\alpha - 1, \alpha + 3, 1)$. Por otro lado, los puntos de L_2 son de la forma $(12\beta - 1, 6\beta + 2, 3\beta + 1)$. Así, tenemos que encontrar α, β tales que se cumplan, simultáneamente,

$$\begin{cases} -1 + 4\alpha = -1 + 12\beta \\ 3 + \alpha = 2 + 6\beta \\ 1 = 1 + 3\beta \end{cases}$$

De la tercera ecuación del sistema, tenemos que $\beta = 0$. Pero, en este caso tenemos, de la ecuación $2 + 6\beta = 3 + \alpha$, que $\alpha = -1$. Tomando $\beta = 0$ y $\alpha = -1$, de la ecuación $-1 + 4\alpha = -1 + 12\beta$, llegamos a que $-5 = -1$, lo cual es un absurdo. Esto quiere decir que las rectas L_1 y L_2 no se intersecan.

En el primer ítem del punto 2, se pide decidir si las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Seguramente, en la escuela secundaria se haya estudiado que dos rectas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas si tienen la misma pendiente. Pero ¿qué determina el paralelismo de dos rectas cuando están escritas de manera vectorial? Dos rectas, escritas en forma vectorial, son paralelas si sus vectores directores lo son. En este caso, el vector director de L_1 es $(3, 2, 1)$. En cambio, el vector director de L_2 es $(6, 4, 2)$. Como estos conceptos se estudian en clase, se espera que los estudiantes argumenten por qué estos dos vectores son paralelos.

En el ítem b) se pide determinar si dos rectas son perpendiculares. En el caso de que las rectas estén escritas de manera vectorial, para determinar que dos rectas son perpendiculares, es necesario observar que los vectores directores lo sean. Esta solución queda a cargo de los estudiantes.

En el punto 3, primero se pide calcular la recta que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -2, 2)$. Observemos que su vector director es $v = (1, -2, 2) - (1, 1, 0) = (0, -3, 2)$. Para encontrar un vector perpendicular a esta recta, necesitamos encontrar un vector director perpendicular a $(0, -3, 2)$. Un posible vector es $(0, 2, 3)$. Así, la recta perpendicular buscada es $(x, y, z) = \alpha(0, 2, 3) + (1, 1, 2)$.

En el punto 4, debemos encontrar un plano Π que contenga a toda la recta L y que pase por el punto P. Para encontrar el plano Π se necesitan tres puntos no colineales. Ya sabemos que el punto $P = (0, 0, -1)$ pertenece a Π. Basta ahora encontrar dos puntos más. En realidad, conocemos la información de que hay infinitos puntos en ese plano; todos los puntos de la recta L. Es tarea de los estudiantes explicar que los puntos $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (1, 4, 4)$ son puntos de Π. ¿Por qué los puntos P, Q y R no son colineales?

A partir de esos tres puntos, se puede encontrar la normal del plano Π. Mas precisamente, la normal de ese plano es

$$N := PQ \times PR = (2, -3, 2).$$

Luego, la ecuación del plano Π es:

$$((x, y, z) - (0, 0, -1) \cdot (2, -3, 2) = 0.$$

De manera equivalente, se puede escribir esa ecuación:

$$\Pi : 2x - 3y + 2z = -2.$$

En el ítem 5 buscamos un plano perpendicular a la recta L_1. Aquí tenemos que la normal del plano Π_1 tiene que ser paralela al vector director de L_1 que es $(0, 2, 3)$. Como, además, tiene que pasar por el punto P, los puntos de Π_1 cumplen que

$$((x, y, z) - P) \cdot N = 0.$$

Más precisamente, $(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (0, 2, 3) = 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

Por otro lado, si queremos un plano Π_1 de manera que sea paralelo a la recta L_1, el vector director de L_1 tiene que ser perpendicular a la normal del plano. Un vector perpendicular a $(0,2,3)$ es $(0,-3,2)$ Por lo tanto, un vector normal de Π_1 es $N=(0,-3,2)$. Concluimos así que los puntos de $(x,y,z)\in\Pi_1$ cumplen que

$$((x,y,z)-(1,1,1))\cdot(0,-3,2)=0.$$

En el ítem 6 se pregunta por la intersección de una recta y un plano. Observemos que, si hay intersección, es un punto o la propia recta. Los puntos de L cumplen que $x=1$, $y=2\alpha+2$ y $z=3\alpha+1$. Para que la recta L se interseque con el plano Π, debe ocurrir que $1-2(2\alpha+2)+3(3\alpha+1)=1$. De esta manera concluimos que, si tomamos $\alpha=\frac{1}{5}$ se tiene que el punto de intersección de L con Π es $(1,\frac{12}{5},\frac{8}{5})$.

7.5.2. Guia de problemas

Estos ejercicios trabajan con rectas y planos, y sus posiciones.

Ejercicio 7.5.1. *Dar la ecuación de la recta que es paralela a* $L:(x,y)=\beta(2,-3)+(1,1)$ *y que pasa por el* $(0,0)$.

Ejercicio 7.5.2. *Hallar la intersección de las rectas* $L_1:3x+y=-3$ *y* $L_2:(x,y)=\alpha(1,3)+(2,0)$.

Ejercicio 7.5.3. *Sean* $L_1:x-2y=2$, $L_2:-2x+y=-3$ *y* $L_3:(x,y)=\alpha(1,-7)$ *tres rectas en* $\mathbb{R}^2$. *¿Es posible encontrar una recta que pase por el punto de intersección de* L_1 *y* L_2 *y por el punto de intersección de* L_2 *y* L_3*?*

Ejercicio 7.5.4. *Sea la recta* $L_1:(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)+(1,3,5)$ *y la recta* L_2*, que es paralela a* L_1 *y pasa por el punto* $(3,2,4)$.

a) *Calcular el punto de* L_2 *que tiene coordenada* $z=0$.

b) *¿Los puntos* $(-1,-1,7)$ *y* $(1,-2,6)$ *están en* L_2*?*

Ejercicio 7.5.5. *Hallar todos los puntos* k *para los cuales la recta que pasa por los puntos* $(1,-1,1)$ *y* $(4,k,-2)$ *es paralela a la recta* $L:(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)+(0,3,2)$.

Ejercicio 7.5.6. *Dados la recta* $L:(x,y,z)=\beta(1,1,-2)+(0,0,3)$ *y el punto* $A=(3,1,0)$*, determinar un punto* B *tal que la recta que pasa por* A *y* B *sea paralela a* L.

Ejercicio 7.5.7. *En un juego de simulación se observa que un meteorito de pequeñas dimensiones está a pocos kilómetros de colisionar con el planeta Tierra. La trayectoria que describe coincide con la recta* $L : (x, y, z) = (2, -1, 1) + \lambda(-1, -2, 1)$.

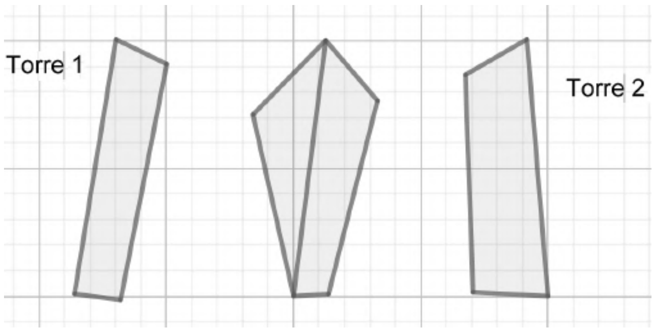
a) ¿En qué punto tocará el suelo?

b) Si el plano $\Pi : 3x - y = 1$ *se ha fijado como separación entre las fronteras de España y Francia, ¿atravesará el meteorito la frontera?*

Ejercicio 7.5.8. *A una determinada hora del día, la luz del Sol que llega a cierta parte de una de las Torres de Kio proyecta un rayo que se puede describir mediante una recta L dada por la siguiente ecuación:*

$$x - y = 0, \quad y - 2z = -4$$

Se sabe también que los planos $\Pi_1 : 5x+y-2z+1 = 0$ *y* $\Pi_2 : 5x+y-2z+25 = 0$ *corresponden a los laterales de la torre izquierda. Ver la siguiente figura:*



a) ¿Cortará el rayo al plano Π_1 *de dicha torre? Si es así, ¿en qué punto?*

b) Dado un punto $A = (0, 0, 5)$, *calcular su proyección ortogonal sobre el plano* $\Pi_1 : 5x + y - 2z = -1$ *de la torre.*

Este ejercicio fue extraído de Díaz García 2015.

Ejercicio 7.5.9. *Hallar, en cada caso, la intersección de la recta L con el plano* Π.

a) $L : (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 2, 1) + (2, 2, 3)$ *y* $\Pi : x_3 = 0$.

b) $L : x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_1 + x_3 = -2$ *y* $\Pi : x_2 = 3$

Ejercicio 7.5.10. *Hallar la ecuación de los siguientes planos:*

a) *Pasa por el punto* $A = (-2, 8, 0)$ *y tiene por vectores directores* $u = (0, 5, -1)$ *y* $v = (7, 2, 2)$.

b) *Pasa por los puntos* $(8, 2, -1)$, $(3, 4, 2)$ *y* $(1, 0, 1)$.

c) *Pasa por el punto* $P = (2, -3, 1)$ *y su vector normal es* $N = (5, -3, -4)$.

d) *Es perpendicular a la recta* $L : \alpha(1, 0 - 2) + (1, 1, 3)$ *y pasa por el punto* $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 7.5.11. *Hallar la ecuación de un plano* π *sabiendo que contiene a la recta* r *y que pasa por el punto* $P = (-2, 5, 1)$, *donde las ecuaciones que describen* r *son*

$$r : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$$

Ejercicio 7.5.12. *a)* *Calcular el valor de* m *para que los puntos* $A = (m, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (1, 2, 3)$ *y* $D = (7, 2, 1)$ *estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?*

b) *¿Para qué valores del parámetro* m *los tres planos siguientes se cortan en un único punto? ¿Para qué valores se cortan en una línea recta? ¿Para qué valores los tres planos no se cortan?*

$$\pi_1 : x - 3y + 5z = 3$$

$$\pi_2 : 2x - y + 2z = 1$$

$$\pi_3 : 5x - 5y + 9z = m.$$

Ejercicio 7.5.13. *Sean la recta* $r : \begin{cases} 3x - y + z &= 0 \\ 2x - z + 3 &= 0 \end{cases}$ *y el plano* $\Pi : ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) *Calcular el valor de* a *para que* r *sea paralela al plano.*

b) *¿Existe algún valor de* a *para el cual* r *es perpendicular al plano?*

Ejercicio 7.5.14. *Sea* $L : (x, y, z) = \beta(a^2 + 1, a, a + 7)$ *y* $\Pi : x + 2y - 3z = 2$. *¿Existirá algún valor de* a *para los cuales la recta* L *y el plano* Π *no tenga intersección?*

7.5.3. Resolución de algunos ejercicios de la guía de problemas

La dificultad para resolver el ejercicio 7.5.4 es que no conocemos la recta de manera explícita. El primer objetivo, por lo tanto, es encontrar L_2. El primer dato que proporciona el ejercicio es que la recta L_2 es paralela a L_1. De aquí, sabiendo que para que dos rectas sean paralelas es necesario que sus vectores directores lo sean, podemos tomar como vector director de L_2 al vector $(1, 2, -1)$. Otro dato de la recta L_2 es que pasa por el punto $(3, 2, 4)$. De aquí concluimos que la ecuación de la recta L_2 escrita de manera vectorial es

$$L_2 : (x, y, z) = \beta(1, 2, -1) + (3, 2, 4).$$

Con la información de la recta, es posible contestar los ítems del ejercicio.

En el ítem a), se debe encontrar un punto de L_2 de manera que la coordenada $z = 0$. Así, necesitamos encontrar un $\beta \in \mathbb{R}$, tal que

$$(x, y, 0) = (\beta + 3, 2\beta + 2, -\beta + 4).$$

De aquí, se observa que $-\beta + 4 = 0$, de lo que deducimos que $\beta = 4$. Ahora, si $\beta = 4$, entonces tenemos que $x = 7$, e $y = 10$. Resolver el segundo ítem queda a cargo de los estudiantes.

El ejercicio 7.5.6 tiene la particularidad de que ofrece mucha información para hallar el punto B. Se debe un poco esa información. Primero, tenemos la recta $L : (x, y, z) = \beta(1, 1, -2) + (0, 0, 3)$ y el punto $A = (3, 1, 0)$. También tenemos una recta L_1 que pasa por los puntos A y $B = (a, b, c)$, que resulta paralela a L. ¿Cómo hallar el punto B? Para ello, cabe preguntarse cuándo dos rectas son paralelas. Esto sucede si sus vectores directores son paralelos. En este caso, la recta L_1 tiene como vector director un vector paralelo a $(1, 1, -2)$. Podemos tomar como vector director de L_2 a $(1, 1, -2)$, por ejemplo. Como la recta L_2 pasa por A, es posible describir dicha recta:

$$L_2 : (x, y, z) = k(1, 1, -2) + (3, 1, 0).$$

Así, para dar un punto B, basta tomar cualquier valor de k.

A continuación resolvemos el ejercicio 7.5.7. En el primer ítem hay que averiguar cuándo el meteorito tocará la Tierra. Para que eso suceda, la altura, que en este caso se simboliza con z, debe ser cero. Por ello, buscamos la posición (x, y), de manera que $z = 0$. En este caso, necesitamos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que

$$(x, y, 0) = (2, -1, 1) + \lambda(-1, -2, 1). \tag{7.5}$$

De (7.5) tenemos que $\lambda+1 = 0$ o, lo que es lo mismo, $\lambda = -1$. Así, $x = 2-\lambda = 2+1 = 3$ e $y = -1-2\lambda = -1+2 = 1$. Deducimos que el meteorito tocará la Tierra en la posición $(3, 1, 0)$.

El ítem b) pregunta si el meteorito, que tiene una trayectoria dada por la recta L, atravesará la frontera entre España y Francia, que está descrita mediante la ecuación dada por Π. Matemáticamente, lo que debemos averiguar es si hay intersección entre L y Π. Observemos que un punto del plano cumple con la ecuación $3x-y = 1$. Dicho de otra manera, los puntos del plano son de la forma $(x, 3x-1, z)$, donde $x, z \in \mathbb{R}$. Si un punto del plano pertenece a la recta L, debería ocurrir que

$$(x, 3x-1, z) = (2, -1, 1) + \lambda(-1, -2, 1).$$

De modo equivalente, se debería poder encontrar un $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que se cumpla simultáneamente

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ 3x - 1 = -1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema anterior, obtenemos que $\lambda = 2-x$. Reemplazando este valor en la segunda ecuación del sistema, hallamos que $3x - 1 = -1 - 2(2 - x)$ o, lo que es equivalente, que $x = -4$. Así, deducimos que $\lambda = 6$. Entonces, el punto de intersección entre L y Π es $(-4, -13, 7)$.

Resolveremos ahora el ejercicio 7.5.8. Lo primero que hay que preguntarse es dónde quedan las Torres de Kio. Se espera que los estudiantes investiguen la historia de estas torres.

Este ejercicio plantea las ecuaciones que describen la proyección del rayo cuando llega a cierta parte de una de las Torres de Kio, y los planos laterales de una de esas torres. Una de las primeras preguntas es si el rayo de sol corta al plano Π_1. En este ejercicio hay que averiguar si hay intersección entre una recta y un plano. La ecuación de la recta L que describe el rayo de Sol es:

$$x - y = 0 \quad y - 2z = -4,$$

y la ecuación de uno de los planos laterales es

$$\Pi_1 : 5x + y - 2z = -1.$$

Buscamos un punto (x, y, z) que interseque a L y Π_1. Si existe, debe verificar, por un lado, las ecuaciones de L, por lo que es un punto de la forma $(2z - 4, 2z - 4, z)$, con $z \in \mathbb{R}$. Por otro lado, debe verificar la ecuación del plano Π_1. Por lo tanto, debe cumplirse que

$$5(2z-4)+2z-4-2z=-1.$$

Entonces, $z=\frac{23}{10}$. Así, el rayo de sol corta al plano Π_1 en el punto $(\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{23}{10})$.

7.6. Ejercicios varios

Los siguientes ejercicios integran los contenidos de vectores, rectas y planos vistos en este capítulo.

Ejercicio 7.6.1. *Un avión está situado en la posición* $(2,2)$ *al mediodía y unos minutos después se encuentra en la posición* $(5,5)$*. ¿Cuál fue el ángulo de elevación del avión? Ayudarse con Geogebra y hacer un cálculo.*

Un momento después el avión desciende en un ángulo de 60^o *desde la posición anterior hasta la posición* $(6,m)$ *¿Cuál es el valor de* m*?*

Ejercicio 7.6.2. *Dados los puntos* $A=(1,2)$*,* $B=(3,5)$ *y* $C=(4,1)$*, determinar otro punto D, de manera que ABDC sean vértices consecutivos de un paralelogramo. Determinar el punto de corte de sus diagonales y el área de ese paralelogramo. Resolver con Geogebra*

Ejercicio 7.6.3. *Dados los puntos* $A=(2,2,2)$ *y* $B=(2,-2,0)$*, hallar otro punto* $C=(a,0,a+2)$*, de manera que ABC sean los vértices consecutivos de un triángulo tal que los lados AB=BC. Calcular también el área de dicho triángulo. Resolver con Geogebra.*

Ejercicio 7.6.4. *Sean los puntos* $A=(1,2,1)$*,* $B=(2,3,1)$*,* $C=(0,5,3)$ *y* $D=(-1,4,3)$*.*

1. *Probar que los cuatro puntos pertenecen a un mismo plano.*
2. *Demostrar que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.*
3. *Calcular el área del rectángulo.*

Ejercicio 7.6.5. *Dado los vectores* $v=(3,4)$ *y* $w=(1,k)$*, encontrar todos los valores de* k *de modo tal que el ángulo entre* v *y* w *sea* 45^o*. Encontrar las coordenadas de un vector unitario perpendicular al vector* $v-w$*.*

Ejercicio 7.6.6. *Se quiere representar el aula en Geogebra. El origen de un sistema de referencia* $(0,0,0)$ *se sitúa en la esquina inferior izquierda del aula. Obtener las ecuaciones del plano del suelo y de las dos paredes. Recrear el aula con GeoGebra 3D.*

a) *Situar a algunos estudiantes en los puntos* $A = (2, 2, 0)$*,* $B = (4, 2, 0)$*,* $C = (2, 4, 0)$*,* $D = (4, 4, 0)$*,* $E = (6, 2, 0)$*,* $F = (6, 4, 0)$*. Obtener la recta que pasa por los alumnos* A *y* F*. ¿Sobre qué plano se encuentra?*

b) *Se ubica el pizarrón en los extremos* $G = (0, 2, 2)$*,* $H = (0, 4, 2)$*,* $I = (0, 2, 4)$*,* $J = (0, 4, 4)$*. ¿Sobre qué plano se encuentra el pizarrón?*

c) *Obtener la recta que pasa por el alumno* B *y el extremo* J*. ¿Se sitúa esta recta sobre alguno de los planos* XY*,* XZ *o* YZ*?*

d) *Determinar el plano que pasa por los puntos* H, D, I*.*

Este ejercicio fue extraído de Díaz García 2015.

Ejercicio 7.6.7. *Explorar los siguientes recursos de Geogebra para realizar el gráfico de la recta L descripta por los puntos* $(x, y) = k \cdot (1, 2) + (0, -1)$*, con* $k \in \mathbb{R}$*.*

a) *Construir los vectores* $u = (1, 2)$*,* $v = (0, -1)$ *y un deslizador* k*. Luego, definir en la barra de entrada* $w = k * u + v$ *y mover el deslizador* k *a lo largo de su recorrido.*

b) *Construir los puntos* $A = (1, 2)$*,* $B = (0, -1)$ *y un deslizador* k*. Luego definir en el campo de entrada* $C = k * A + B$ *y mover el deslizador* k*.*

Observar que Geogebra considera que el vector $u = (1, 2)$ *es distinto del punto* $A = (1, 2)$*.*

Ejercicio 7.6.8. *Usando Geogebra, realizar los siguientes gráficos:*

a) *Una recta con dirección* $(2, 3)$ *y que pase por el punto* $(-1, 1)$*.*

b) *Una recta con dirección* $(-1, 0, 1)$ *y que pase por el punto* $(1, 2, 1)$*.*

Ejercicio 7.6.9. *Realizar las siguientes construcciones con Geogebra y luego describir cómo se construyeron:*

a) *Dos rectas en el espacio que no se crucen en ningún punto.*

b) *Dos rectas en el espacio que no se crucen en ningún punto y que no sean paralelas.*

c) *¿Es posible realizar la construcción del punto anterior si las rectas se encuentran en* $\mathbb{R}^2$*? Explicar la respuesta.*

Ejercicio 7.6.10. *a)* *Usando Geogebra, encontrar y graficar la ecuación vectorial de la recta* L *que pasa por los puntos* $P = (1, 2)$ *y* $Q = (2, 1)$*.*

b) *Graficar en el mismo sistema de coordenadas la ecuación vectorial de la recta* $L_2 : (x, y) = k \cdot (2, 3) + (0, 1)$*.*

c) *Utilizar las herramientas que brinda Geogebra para hallar la intersección entre las rectas* L_1 *y* L_2*. Llamar* P *a ese punto.*

d) Buscar el punto de intersección P haciendo cálculos y comparar el resultado obtenido con el del ítem anterior, usando el software.

e) Explicar, usando el soporte gráfico, por qué la recta de ecuación $L_3 : (x, y) = \alpha(\frac{1}{4}, \frac{-3}{4}) + (0, 3)$ *no puede intersecar en ningún punto a* L_1.

Ejercicio 7.6.11. *Se desea construir el plano del techo sobre la escalera de una casa, de manera que este sea paralelo a la recta descrita por la baranda* $R : (x, y, z) = (2 - 2\lambda, 1, \lambda)$ *y que pase por los puntos* $A = (0, 0, 4)$ *y* $B = (2, 1, 3)$. *Determinar la ecuación de ese plano.*

Ejercicio 7.6.12. *En un juego de simulación se observan las trayectorias de dos aviones, que están descriptas por las siguientes rectas:*

$$\begin{aligned} r : (x, y, z) &= (2, 4, 8) + \lambda(13, 28, 4) \\ s : (x, y, z) &= (7, 8, 13) + \lambda(8, 24, -1) \end{aligned}$$

¿Los dos aviones pasarán por el mismo punto en su recorrido? Si es así, hallar ese punto.

Resolución de algunos ejercicios

Para resolver el ejercicio 7.6.1, primero hay que calcular el ángulo de elevación que se forma entre los puntos $A = (2, 2)$ y $B = (5, 5)$.

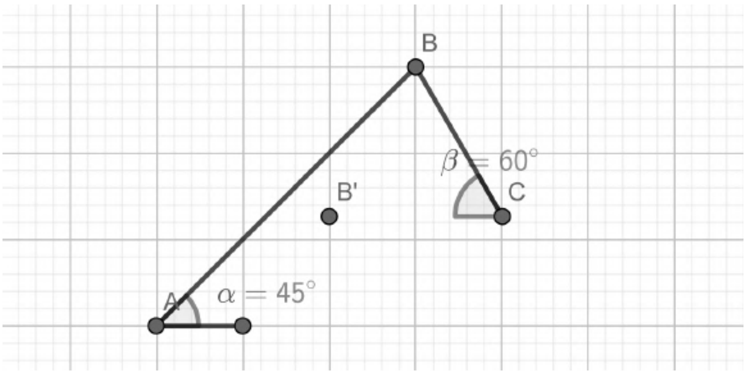


Figura 7.15

En Geogebra vemos que este ángulo es de 45^0. También se lo puede calcular usando razones trigonométricas, y queda a cargo de los estudiantes averiguar cuáles son esas razones.

Por estas razones trigonométricas, sabemos que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{5-2}{5-2} = \frac{3}{3} = 1.$$

Entonces α, el ángulo de elevación, es $\alpha = 45^0$. Por otro lado, hay que calcular el punto $C = (6, m)$ de manera que el ángulo que se forma al descender el avión del punto B al C es de 60^0. Nuevamente,

$$\operatorname{tg}(60^0) = \frac{5-m}{1}.$$

De ahí, $m = 5 - \sqrt{3}$.

Usando Geogebra, en el ejercicio 7.6.2 vemos que el punto D es $D = (6, 4)$.

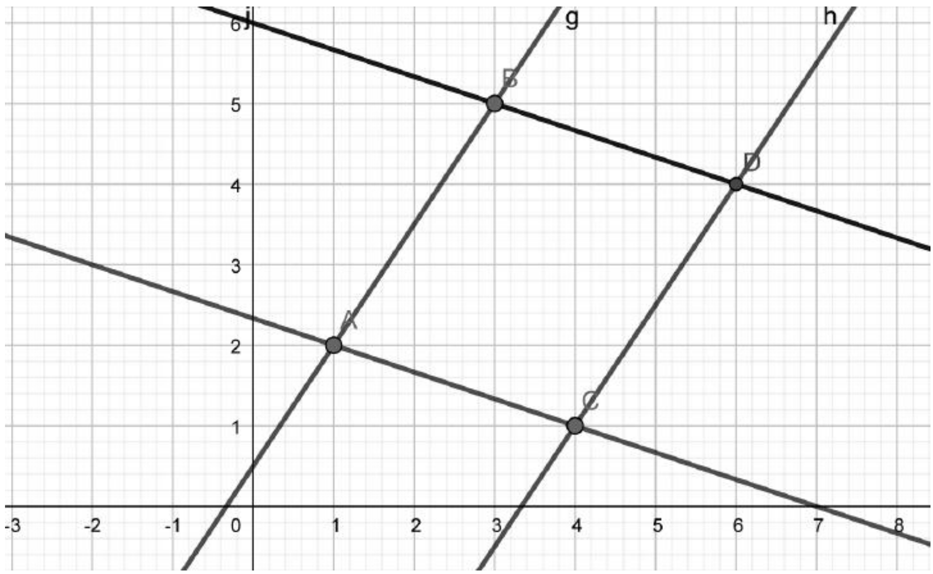


Figura 7.16

¿Cómo demostrar que, efectivamente, este punto D es un punto tal que $ABDC$ forma un paralelogramo? Recordemos que un paralelogramo cumple que los lados no consecutivos deben ser paralelos. De verse, que los vectores $v = AB$ y $w = CD$ sean paralelos, es decir, que trasladados al origen, deben ser uno múltiplo del otro. Notemos que v trasladado al origen es $B - A = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$. Por otro lado, w trasladado al origen es $D - C = (6, 4) - (4, 1) = (2, 3)$. Entonces, v y w son paralelos puesto que sus trasladados lo son.

También hay que averiguar el punto de intersección entre la diagonal que se forma con los puntos A y D, y la diagonal que se forma con los puntos B y C. Usando Geogebra, vemos que este punto de intersección es $E = (3.5, 3)$.

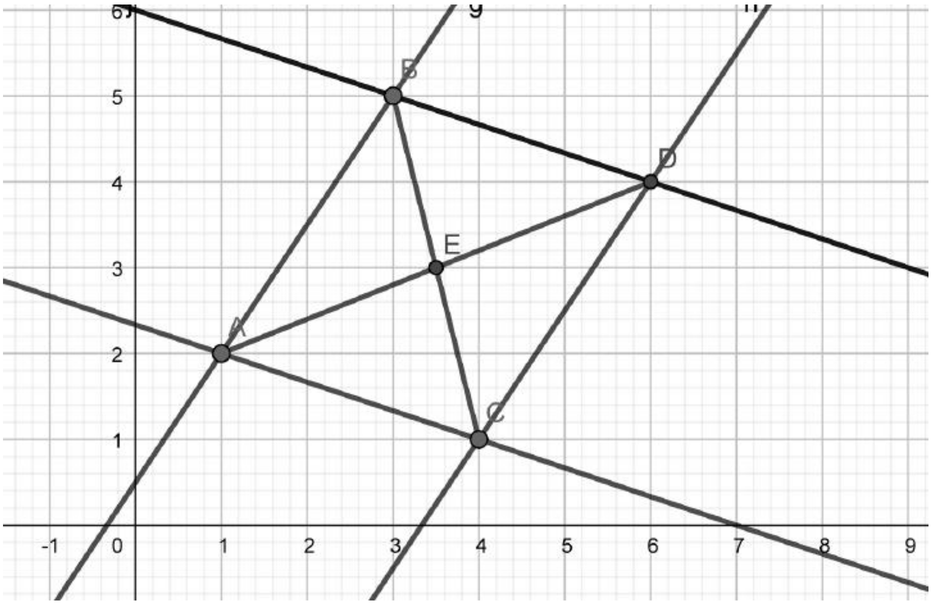


Figura 7.17

¿Cómo hallar este punto de intersección entre las diagonales? Una propiedad es que el punto intersección de las diagonales de un paralelogramo coincide con el punto medio de cada una de ellas. Si consideramos la diagonal formada por los punto B y C, tenemos que el punto medio es

$$E = \frac{B + C}{2} = (\frac{7}{2}, \frac{6}{2}) = (3.5, 3).$$

Para hallar el área del paralelogramo, usamos el comando Área de Geogebra que está en la barra de herramientas. El área es 11 cm^2.

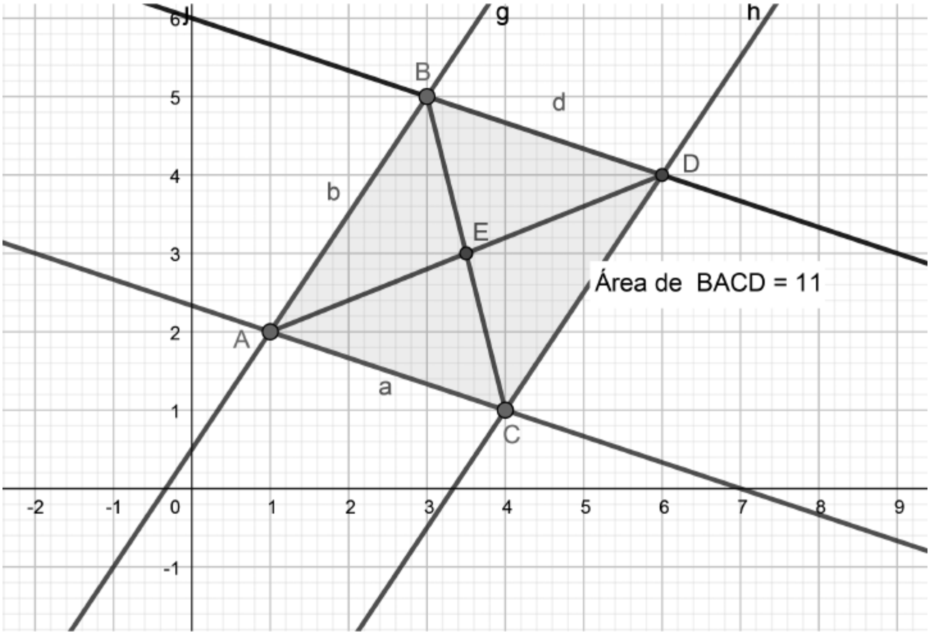


Figura 7.18

Este ejercicio introduce la noción geométrica de la función *determinante*.

Pensemos una fila (a, b) de una matriz cuadrada de tamaño 2×2 como un vector con origen en el $(0, 0)$ y extremo en el punto de coordenadas (a, b). Así, una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de tamaño 2×2 define dos vectores-fila, y estos determinan un paralelogramo cuya área (base por altura) tiene signo dado por la orientación. Entonces, cuando se considera el primer vector-fila como la base positiva del paralelogramo, si el segundo vector-fila determina altura, el área es positiva (el primer paralelogramo de las dos figuras que siguen). Por el contrario, si el segundo vector-fila determina bajura, su área es negativa (el segundo paralelogramo a continuación).

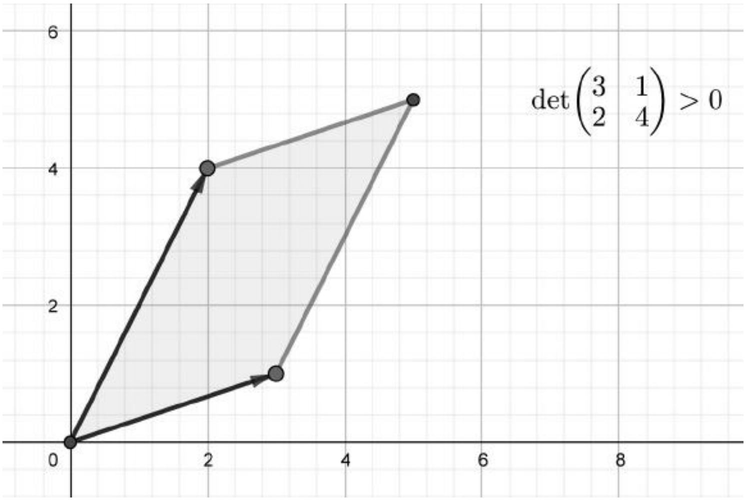


Figura 7.19

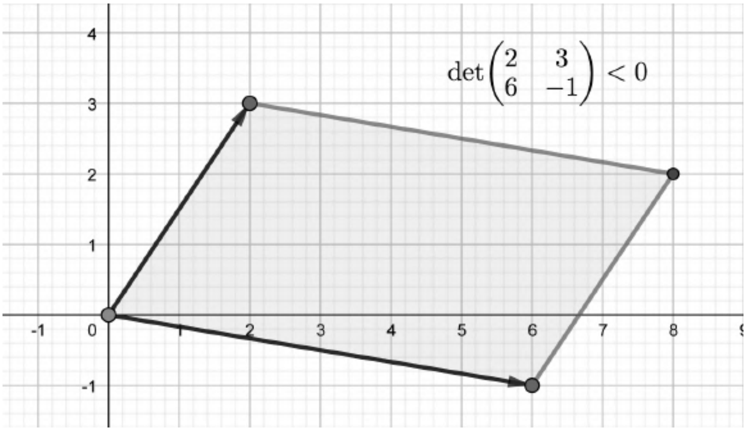


Figura 7.20

Esta área orientada es el determinante de la matriz A. Así, el determinante de una matriz de tamaño 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ es el área orientada del paralelogramo que definen sus vectores fila.

En nuestro caso, si consideramos los vectores $v = AB$ y $u = AC$ y los trasladamos al origen de coordenadas, es decir, $v = B - A = (2, 3)$ y $w = C - A = (4, 1) - (1, 2) = (3, -1)$, el determinante de la matriz $Ma := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es $\det Ma = 9 + 2 = 11$.

Entonces, concluimos que el área del paralelogramo con vértices consecutivos A, B, C y D es de 11 cm^2.

En ejercicio 7.6.3 el triángulo que se forma con los puntos A, B, y C debe ser isósceles, es decir, el segmento AB es igual al segmento BC. Así, hay que plantear la siguiente igualdad:

$$d(A,B) = d(B,C). \tag{7.6}$$

Mediante cálculos, tenemos que $d(A,B) = \sqrt{20}$.

Por otro lado, $d(B,C) = \sqrt{(a-2)^2 + 4 + (a+2)^2}$. De (7.6) tenemos que

$$2a^2 + 12 = 20.$$

Deducimos que $a = 2$ o $a = -2$. que los posibles puntos son $C = (2,0,4)$ o $C = (-2,0,0)$. Los estudiantes deben verificar que el triángulo ABC sea, efectivamente, un triángulo isósceles. Se sugiere apoyarse en un gráfico en 3D realizado con Geogebra. El área del tríangulo ABC, donde $C = (2,0,4)$ está dada por $\frac{||(B-A)\times(C-A)||}{2} = 6$. Es tarea de los estudiantes calcular el área del triángulo ABC con $C = (-2,0,0)$.

También es tarea de los estudiantes resolver el ejercicio 7.6.3, del que resolvemos aquí solamente el ítem 1). Para ver que los puntos A, B, C y D están en un mismo plano, tenemos que ver que los vectores $v = AB$, $w = AC$ y $u = AD$ son linealmente dependientes. Llevando estos vectores al origen, tenemos que $v = B - A = (1,1,0)$, $w = C - A = (-1,3,2)$ y $u = D - A = (-2,2,2)$.

Como $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$, el determinante de la matriz que se forma con los vectores en filas, entonces, v, w, u son linealmente dependientes. Más precisamente, observemos que u se escribe como combinación lineal de w y v, es decir se tiene que $u = w - v$. De esta manera, los puntos A, B, C, D están en un mismo plano.

La primera parte del ejercicio ejercicio 7.6.6 consiste en fijar el sistema de referencia y, a partir de ahí, deducir los planos XY, YZ, XZ que corresponden a las dos paredes, y al suelo. La segunda parte consiste en hacer el diseño del aula en Geogebra 3D. Se sitúan los alumnos y el pizarrón en unos puntos dados, y se pide obtener ecuaciones de rectas y planos que pasen por algunos de ellos.

Lo primero es encontrar la recta que pasa por los puntos A y F. Esta recta se encuentra en el plano XY. La recta L_{AF} se describe de manera vectorial de la forma

$$L_{AF} : (x,y,z) = \alpha(4,2,0) + (2,2,0).$$

Para graficar esta recta en Geogebra 3D, se pone en el menú de entrada recta[A,F]. Esta tarea queda a cargo de los estudiantes. Marcamos luego, en Geogebra, los puntos G, H, I y J. Estos puntos están en el plano YZ.

A continuación, se debe graficar en el programa la recta L_{BJ}, que pasa por los puntos B y J. La ecuación de esa recta es

$$L_{BJ} : (x, y, z) = \beta(4, -2, -4) + (0, 4, 4).$$

Para hallar el plano que pasa por los puntos H, D, I hay que poner plano [H,D,I] en la barra de herramientas de Geogebra.

Por último, en el ejercicio 7.6.11 hay que construir el plano de un techo de la escalera de una casa. Esta actividad contextualiza, a través de Geogebra, la búsqueda de la ecuación de un plano sabiendo que es paralelo a una recta y que pasa por dos puntos dados. Así, es posible utilizar el programa para simular la recta de la baranda y los puntos, y para obtener y visualizar el plano resultante.

En la entrada de Geogebra graficamos la recta R con el comando Recta[punto, vector director]. En este caso, usamos Recta[(2,1,0),(-2,0,1)].

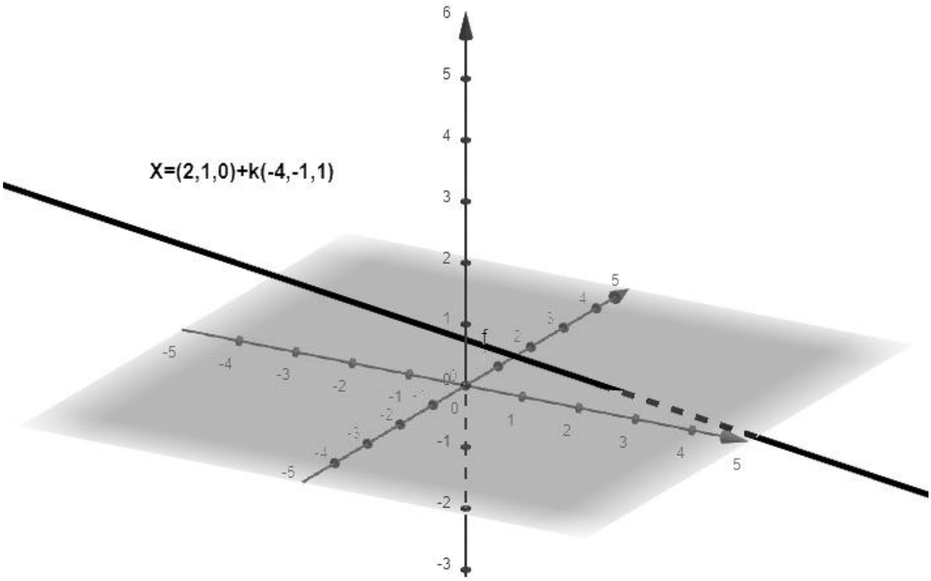


Figura 7.21

A continuación, graficamos el plano que pasa por los puntos $A = (0, 0, 4)$ y $B = (2, 1, 3)$ y que es paralelo a la recta R que describe la baranda.

En primer lugar, el vector que pasa por los puntos A y B, es decir, u=vector[A, B] y el vector director de la recta R, v=vector[(-2,0,1)], son paralelos al plano e independientes entre sí. Por lo tanto, con ambos vectores y uno de los puntos A o B se obtiene la ecuación del plano buscado.

Una posible solución es encontrar el vector $N := u \times v$, que resulta ser la normal del plano, ya que es perpendicular a u y v, respectivamente. En este caso, $N = (1, 0, 2)$. Luego, en el menú de entrada de Geogebra, se pone PlanoPerpendicular[A, N].

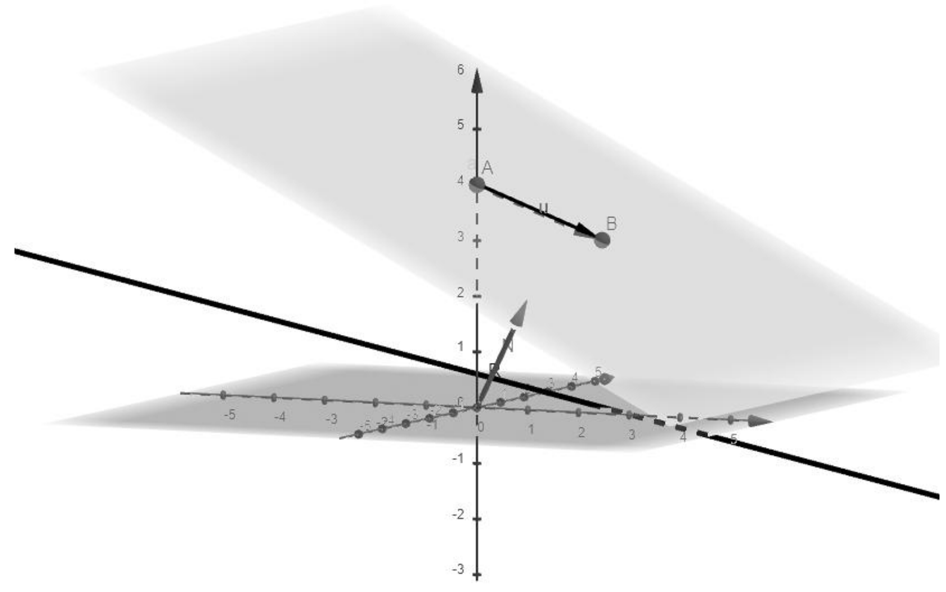


Figura 7.22

Bibliografía

Borrell, G. (2010). *Introducción a Matlab y Octave. Release 0.1*. Free Software Foundation.

Díaz García, N. (2015). “Otro enfoque de la geometría afín en Bachillerato. Revista de Didácticas de la Matemática”. En: *Números* 90, págs. 117-135.

González, C. y H. Caraballo (2013). *Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal*. Editorial Universidad de La Plata, págs. 31-36, 41-52.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal y Aplicaciones*. McGraW-Hill.

Guerra González, A. (2012). “Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales”. Tesis de mtría. Universidad Nacional de Colombia.

Hohenwarter, M. y J. Hohenwarter (2010). *Manual Oficial de la versión 3.2. Documento de ayuda de Geogebra*. URL: www.geogebra.org.

Howard, A. (1994). *Introducción al Álgebra Lineal*. Limusa.

Kindle, J. (1996). *Geometría Analítica*. Serie Shaum.

Kolman, B. y D. Hill (2006). *Álgebra Lineal*. Pearson Prentice Hall.

Krick, T. (2017). *Álgebra 1*. Universidad Nacional de Buenos Aires.

Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación.

Lehmann, C. (1986). *Geometría Analítica*. Limusa.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Thomson.

Este libro se terminó de imprimir en septiembre de 2019,
en Área Cuatro SRL,
Chingolo 480, Rincón de Milberg, pcia. de Buenos Aires (1624).

LIBRO PARA
EL ESTUDIANTE

ÁLGEBRA LINEAL

Álgebra Lineal. Libro para el estudiante está dirigido a los y las estudiantes que cursan Álgebra y Geometría Analítica en carreras de ingeniería, así como otras materias relacionadas con temas de Álgebra Lineal.Esta obra nació de la experiencia docente de la autora en la Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR), donde la asignatura se dicta para las ingenierías Metalúrgica y Eléctrica, y la Tecnicatura Universitaria en Energía Eléctrica.

Las actividades aquí compiladas favorecen el aprendizaje reflexivo y enfocado en el *para qué* es importante que los futuros ingenieros e ingenieras dominen determinados conocimientos matemáticos. Así, los estudiantes encontrarán problemas modelo con resoluciones razonadas, ejercicios teórico-prácticos organizados por temas y, al final de cada capítulo, otros ejercicios que integran los conceptos vistos. Además, propuestas para entrenarse en el uso de herramientas computacionales como Geogebra y Octave, y para trabajar en grupo, una habilidad indispensable en el futuro desempeño profesional.

Mariana Valeria Pérez es profesora de Enseñanza Media y Superior, licenciada y doctora por la Universidad de Buenos Aires (UBA) en el área de Ciencias matemáticas, e investigadora del CONICET. Su campo de estudio incluye la geometría aritmética computacional y el análisis probabilístico de algoritmos, temas sobre los cuales ha publicado varios artículos en revistas internacionales. También investiga sobre la enseñanza de la matemática, particularmente sobre el uso y el impacto de las nuevas tecnologías. Actualmente, es profesora en la Universidad Nacional de Hurlingham, donde dicta Álgebra I y II.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HURLINGHAM

Libros de UNAHUR

ISBN 978-987-47285-1-7

9 789874 728517